

ALGAI WYKLAD 1 Odwzorowania Liniowe

Rozważane są rzeczywiste przestrzenie wektorowe. Wektor zerowy w przestrzeni wektorowej E oznaczamy symbolem θ_E .

Definicja: Przestrzeń wektorowa

Przestrzenią wektorową (liniową) rzeczywistą nazywamy zbiór E wyposażony w dwie funkcje

$$+ : E \times E \rightarrow E, \quad \cdot : \mathbb{R} \times E \rightarrow E$$

(zwane odpowiednio dodawaniem wektorów i mnożeniem przez skalar) spełniające własności:

(A1) $(x + y) + z = x + (y + z)$ dla dowolnych $x, y, z \in E$,

(A2) istnieje taki element $\theta_E \in E$, że $\theta_E + x = x + \theta_E = x$ dla każdego $x \in E$,

(A3) dla każdego $x \in E$ istnieje taki element $-x \in E$, że $x + (-x) = \theta_E$,

(A4) $x + y = y + x$ dla każdych $x, y \in E$,

oraz

(Z1) $t \cdot (x + y) = (t \cdot x) + (t \cdot y)$,

(Z2) $(s + t) \cdot x = (s \cdot x) + (t \cdot x)$,

(Z3) $(ts) \cdot x = t \cdot (s \cdot x)$,

(Z4) $1 \cdot x = x$

dla każdych $s, t \in \mathbb{R}, x, y \in E$.

Definicja 1.1: Odwzorowanie liniowe

Niech E i F będą przestrzeniami wektorowymi. Mówimy, że funkcja $L : E \rightarrow F$ jest **odwzorowaniem liniowym** (transformacją liniową) jeżeli:

(L1) $L(x + y) = L(x) + L(y)$ dla wszystkich $x, y \in E$,

(L2) $L(rx) = rL(x)$ dla wszystkich $r \in \mathbb{R}, x \in E$.

Funkcję $L : E \rightarrow F$ spełniającą warunek (L1) nazywamy **odwzorowaniem addytywnym**, natomiast funkcję spełniającą (L2) - **odwzorowaniem jednorodnym**.

Lemat 1.2

Jeżeli $L : E \rightarrow F$ jest odwzorowaniem addytywnym, to $L(\theta_E) = \theta_F$.

Lemat 1.3

Jeżeli $L : E \rightarrow F$ jest odwzorowaniem jednorodnym, to $L(\theta_E) = \theta_F$.

Wniosek 1.4

Jeżeli $L : E \rightarrow F$ jest odwzorowaniem liniowym, to $L(\theta_E) = \theta_F$.

Twierdzenie 1.5 (Warunki równoważne liniowości odwzorowania)

Niech $L : E \rightarrow F$ będzie odwzorowaniem. Równoważne są zdania:

(1) L jest odwzorowaniem liniowym;

(2) $L(rx + sy) = rL(x) + sL(y)$ dla wszystkich $r, s \in \mathbb{R}, x, y \in E$;

(3) $L\left(\sum_{i=1}^n r_i x_i\right) = \sum_{i=1}^n r_i L(x_i)$ dla wszystkich $n \in \mathbb{N}, r_i \in \mathbb{R}, x_i \in E$;

(4) $L(rx + y) = rL(x) + L(y)$ dla wszystkich $r \in \mathbb{R}, x, y \in E$.

Definicja 1.6

Zbiór wszystkich odwzorowań liniowych z przestrzeni E w przestrzeń F oznaczamy symbolem $L(E, F)$.

Definicja 1.7

Każde odwzorowanie liniowe z przestrzeni E w samą siebie nazywamy **endomorfizmem liniowym**. Zbiór wszystkich endomorfizmów liniowych przestrzeni E oznaczamy symbolem $\text{End}(E)$.

Definicja 1.8

Każde odwzorowanie liniowe z przestrzeni E w przestrzeń $\mathbb{R}$ nazywane jest **funkcjonałem liniowym**.

Definicja 1.11

Dla $m, n \in \mathbb{N}$ symbolem $\mathcal{M}_{m \times n}$ oznaczamy przestrzeń macierzy rzeczywistych o wymiarach $m \times n$.

Twierdzenie 1.19 („O odwzorowaniu liniowym określonym na zbiorze generatorów”)

Niech

- $T, S \in L(E, F)$
- $E = \text{span}\{e_1, \dots, e_n\}$.

Jeżeli $T(e_i) = S(e_i)$ dla każdego $i = 1, \dots, n$, to $T = S$.

Twierdzenie 1.20 („O odwzorowaniu liniowym określonym na bazie”)

Niech $B = \{e_1, \dots, e_n\}$ będzie bazą przestrzeni E oraz niech $f_1, \dots, f_n \in F$ będą dowolnymi wektorami.

Wówczas istnieje dokładnie jedno odwzorowanie liniowe $L : E \rightarrow F$ takie, że $L(e_i) = f_i$ dla każdego $i = 1, \dots, n$.

Definicja 1.21: Baza uporządkowana

Bazą uporządkowaną (reperem) przestrzeni wektorowej E wymiaru n nazywamy ciąg $(e_1, \dots, e_n)$, jeśli zbiór $\{e_1, \dots, e_n\}$ jest bazą tej przestrzeni.

Definicja 1.22: Standardowa baza uporządkowana

Standardową uporządkowaną bazą przestrzeni $\mathbb{R}^n$ nazywamy ciąg $(E_1, \dots, E_n)$, gdzie E_i jest wektorem z 1 na i -tej pozycji i zerami na pozostałych.

Definicja 1.23

Symbolem $[K_1 | K_2 | \dots | K_n]$ oznaczamy macierz, której kolejnymi kolumnami są wektory $K_1, K_2, \dots, K_n$.

Twierdzenie 1.24 (O postaci odwzorowania liniowego z $\mathbb{R}^n$ w $\mathbb{R}^m$)

Niech $T : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^m$ będzie odwzorowaniem liniowym.

Wówczas istnieje jedyna macierz $A \in \mathcal{M}_{m \times n}$ taka, że $T(X) = AX$ dla każdego $X \in \mathbb{R}^n$.

Ponadto, jeśli $(E_1, \dots, E_n)$ jest standardową bazą $\mathbb{R}^n$, to $A = [T(E_1)|T(E_2)|\dots|T(E_n)]$.

Definicja 1.25: Jądro odwzorowania

Jądrem odwzorowania liniowego $T \in L(E, F)$ nazywamy zbiór

$$\ker T = \{x \in E : T(x) = \theta_F\}$$

Twierdzenie 1.26

Jądro $\ker T$ odwzorowania liniowego $T \in L(E, F)$ jest podprzestrzenią liniową przestrzeni E .

Definicja 1.28: Monomorfizm

Różnowartościowe odwzorowanie liniowe nazywamy **monomorfizmem liniowym**.

Twierdzenie 1.27

Odwzorowanie liniowe $T \in L(E, F)$ jest **różnowartościowe (monomorfizm)** wtedy i tylko wtedy, gdy $\ker T = \{\theta_E\}$.

Wniosek 1.29

Odwzorowanie T_A , gdzie $A \in \mathcal{M}_{m \times n}$, jest **monomorfizmem-różnowartościowe** wtedy i tylko wtedy, gdy $\text{rz}(A) = n$.

Lemat 1.30 („O monomorficznym obrazie zbioru liniowo niezależnego“)

Jeżeli $T : E \rightarrow F$ jest **monomorfizmem-różnowartościowe**, a $Z \subset E$ jest zbiorem **liniowo niezależnym**, to $T[Z]$ jest zbiorem liniowo niezależnym w F .

Definicja 1.31: Obraz odwzorowania

Obrazem odwzorowania liniowego $T \in L(E, F)$ nazywamy zbiór

$$\text{Im } T = \{y \in F : \exists x \in E, y = T(x)\}$$

Mówiąc najprościej: Obraz to **zbiór wszystkich możliwych WYNIKÓW transformacji**. To jest jej „zasięg” lub „zbiór wartości”.

Twierdzenie 1.32 Obraz jest podprzestrzenią

Obraz odwzorowania liniowego $T \in L(E, F)$ jest podprzestrzenią liniową przestrzeni F .

Definicja 1.33: Epimorfizm liniowy

Odwzorowanie liniowe $T : E \rightarrow F$ nazywamy **epimorfizmem liniowym**, jeżeli $\text{Im } T = F$.

Wniosek 1.34 $\text{Im } T_A = \text{span}\{K_1, \dots, K_n\}$

Zbiór wszystkich możliwych wyników ($\text{Im } T_A$) transformacji opisanej macierzą A jest dokładnie tym samym, co przestrzeń, którą można "zbudować" za pomocą kombinacji liniowych kolumn tej macierzy (span).

Dla $A = [K_1 | \dots | K_n] \in \mathcal{M}_{m \times n}$
zachodzi $\text{Im } T_A = \text{span}\{K_1, \dots, K_n\}$.

Wniosek 1.35

Geometryczny wymiar zbioru wyników transformacji
jest dokładnie taki sam,
jak liczba niezależnych kolumn w macierzy,
która tę transformację opisuje.

Dla $A \in \mathcal{M}_{m \times n}$
zachodzi $\dim \text{Im } T_A = \dim \text{span}\{K_1, K_2, \dots, K_n\} = \text{rz}(A)$.

Definicja 1.36: Rząd odwzorowania = wymiar obrazu

Rzędem odwzorowania liniowego $T : E \rightarrow F$ nazywamy wymiar jego obrazu:
 $\text{rank}(T) = \dim(\text{Im } T)$.

Izomorfizmy liniowe

Definicja 2.1 izomorfizm

Odwzorowanie liniowe $T : E \rightarrow F$, które jest **bijekcją**, nazywamy **izomorfizmem liniowym**.

Definicja 2.2 izomorficzne

Mówimy, że przestrzenie liniowe E i F są **izomorficzne** ($E \cong F$), jeśli istnieje między nimi **izomorfizm** liniowy.

Oczywiście. Poniżej znajdują się formalne definicje iniekcji, suriekcji i bijekcji, wraz z opisem słownym i odniesieniem do terminologii z algebry liniowej, którą już poznałeś.

1. Iniekcja (funkcja różnowartościowa)

Definicja Formalna

Niech dana będzie funkcja $f : X \rightarrow Y$. Mówimy, że f jest **iniekcją** (lub jest różnowartościowa), jeżeli dla dowolnych elementów $x_1, x_2 \in X$ spełniony jest warunek:

$$f(x_1) = f(x_2) \implies x_1 = x_2$$

Równoważnie, można to zapisać jako:

$$x_1 \neq x_2 \implies f(x_1) \neq f(x_2)$$

Opis Słowny

Funkcja jest różnowartościowa, jeśli **każdy element w zbiorze docelowym Y jest trafiany co najwyżej raz**. Inaczej mówiąc, żadne dwa różne argumenty (x_1, x_2) nie mogą dać tego samego wyniku. Każdy "wystrzelony" argument ląduje w swoim unikalnym miejscu.

W Algebrze Liniowej

Odwzorowanie liniowe, które jest iniekcją, nazywamy **monomorfizmem**. Warunkiem koniecznym i wystarczającym jest, aby jego jądro było trywialne: $\ker T = \{\theta_E\}$.

2. Suriekcja (funkcja "na")

Definicja Formalna

Niech dana będzie funkcja $f : X \rightarrow Y$. Mówimy, że f jest **suriekcją** (lub jest "na" zbiór Y), jeżeli dla każdego elementu $y \in Y$ istnieje co najmniej jeden element $x \in X$ taki, że:

$$\forall y \in Y \quad \exists x \in X : f(x) = y$$

Opis Słowny

Funkcja jest suriekcją, jeśli jej zbiór wartości (obraz) jest równy całej przeciwdziedzinie. Oznacza to, że **każdy element w zbiorze docelowym Y jest trafiony przynajmniej raz**. Nie ma w Y "pustych", nieużywanych elementów.

W Algebrze Liniowej

Odwzorowanie liniowe, które jest suriekcją, nazywamy **epimorfizmem**. Warunkiem koniecznym i wystarczającym jest, aby jego obraz był równy całej przestrzeni docelowej: $\text{Im } T = F$.

3. Bijekcja (funkcja wzajemnie jednoznaczna)

Definicja Formalna

Niech dana będzie funkcja $f : X \rightarrow Y$. Mówimy, że f jest **bijekcją**, jeżeli jest jednocześnie **iniekcją** i **suriekcją**.

Opis Słowny

Funkcja jest bijekcją, jeśli tworzy idealne "parowanie" jeden do jednego między elementami zbiorów X i Y . **Każdy element w zbiorze docelowym Y jest trafiany dokładnie jeden raz.** Ani za mało (suriekcja), ani za dużo (iniekcja). To oznacza, że zbiory X i Y muszą być "tej samej wielkości" (mieć tę samą moc).

W Algebrze Liniowej

Odwzorowanie liniowe, które jest bijekcją, nazywamy **izomorfizmem**. Oznacza to, że przestrzenie E i F są "strukturalnie identyczne".

Podsumowanie w Tabeli

Pojęcie	Inna nazwa	Warunek	W Algebrze Liniowej
Iniekcja	Różnowartościowa	Różne argumenty dają różne wyniki	Monomorfizm ($\ker T = \{0\}$)
Suriekcja	"Na"	Każdy element w zbiorze docelowym jest wynikiem	Epimorfizm ($\text{Im } T = F$)
Bijekcja	Wzajemnie jednoznaczna	Jest iniekcją ORAZ suriekcją	Izomorfizm

ALGAI WYKLAD 2 Izomorfizmy-bijekcje liniowe

Izomorfizmy liniowe

Definicja 2.1

Każde odwzorowanie liniowe $T : E \rightarrow F$ będące **bijekcją** nazywamy **izomorfizmem liniowym**.

Definicja 2.2

Mówimy, że przestrzenie liniowe E i F są **izomorficzne**, jeśli istnieje izomorfizm liniowy $T : E \rightarrow F$. Fakt, że przestrzenie liniowe E i F są izomorficzne zapisujemy symbolem

$$E \cong F$$

Fakt, że $T : E \rightarrow F$ jest izomorfizmem liniowym przestrzeni E i F zapisujemy następująco:

$$T : E \xrightarrow{\cong} F \quad \text{lub} \quad E \xrightarrow[T]{\cong} F$$

Twierdzenie 2.3

Odwzorowanie liniowe $T : E \rightarrow F$ jest izomorfizmem wtedy i tylko wtedy, gdy $\ker T = \{0_E\}$ i $\operatorname{Im} T = F$.

Definicja 2.4

Każdy liniowy **endomorfizm** $T : E \rightarrow E$ będący **izomorfizmem-bijekcją** nazywamy **automorfizmem** przestrzeni wektorowej E .

Definicja 2.5

Zbiór wszystkich **automorfizmów** przestrzeni wektorowej E oznaczamy symbolem

$$\operatorname{Aut}(E)$$

Twierdzenie 2.6

Jeżeli

E_0 jest podprzestrzenią liniową przestrzeni E
oraz $\dim E_0 = \dim E < \infty$,
to $E_0 = E$.

Wniosek 2.8 równoważne automorfizm

Niech $n \in \mathbb{N}$, $A \in \mathcal{M}_{n \times n}$. Wówczas równoważne są zdania:

- (a) $T_A : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$ jest automorfizmem przestrzeni $\mathbb{R}^n$,
- (b) $\operatorname{rz}(A) = n$,
- (c) $\det A \neq 0$.

Twierdzenie 2.9 (O wymiarach jądra i obrazu odwzorowania liniowego)

Niech

$T : E \rightarrow F$ będzie odwzorowaniem liniowym

oraz niech $\ker T$ i $\operatorname{Im} T$ będą przestrzeniami skończonego wymiaru.

Wówczas E ma skończony wymiar oraz

$$\dim E = \dim(\ker T) + \dim(\operatorname{Im} T)$$

Twierdzenie 2.10

Jeżeli $T : E \rightarrow F$ jest dowolnym odwzorowaniem liniowym, to

$$\dim E = \dim(\ker T) + \dim(\operatorname{Im} T)$$

Lemat 2.11 o równoważności IZMów

Jeżeli

$T \in L(E, F)$

oraz $\dim E = \dim F < \infty$,

to równoważne są zdania:

- (a) T jest monomorfizmem ($\ker T = \{\theta_E\}$),
- (b) T jest epimorfizmem ($\operatorname{Im} T = F$),
- (c) T jest izomorfizmem liniowym.

Składanie (suprepozycja) odwzorowań liniowych a mnożenie macierzy

Definicja 3.12

Niech $T : E \rightarrow F$ będzie odwzorowaniem liniowym, $x \in E$.

Wartość $T(x)$ będziemy również oznaczać symbolem Tx .

Twierdzenie 3.13 o superpozycji

Niech $m, n, p \in \mathbb{N}$, $A \in \mathcal{M}_{p \times m}$, $B \in \mathcal{M}_{m \times n}$.

Wówczas $T_A \circ T_B$ jest odwzorowaniem liniowym oraz

$$T_A \circ T_B = T_{AB}$$

Twierdzenie 3.14 złożenie/suprepozycja OL/TL jest OL/TL

Złożenie dwóch dowolnych odwzorowań liniowych jest odwzorowaniem liniowym.

Twierdzenie 3.15

Funkcja $f : A \rightarrow B$ jest **bijekcją**

wtedy i tylko wtedy, gdy istnieje taka funkcja $g : B \rightarrow A$, że

$$g \circ f = \operatorname{Id}_A, \quad f \circ g = \operatorname{Id}_B$$

Twierdzenie 3.16

Funkcja $g : B \rightarrow A$ jest funkcją odwrotną do $f : A \rightarrow B$ wtedy i tylko wtedy, gdy

$$g \circ f = \text{Id}_A, \quad f \circ g = \text{Id}_B$$

Twierdzenie 3.17 macierzą odwracalną i liniowym izomorfizmem

Jeżeli $n \in \mathbb{N}$, $A \in \mathcal{M}_{n \times n}$ jest macierzą odwracalną, to $T_A : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$ jest liniowym **izomorfizmem-bijekcją** oraz

$$(T_A)^{-1} = T_{A^{-1}}$$

Twierdzenie 3.18

Jeżeli $T \in L(E, F)$ jest **izomorfizmem-bijekcją** liniowym przestrzeni wektorowych E i F , to $T^{-1} : F \rightarrow E$ jest **izomorfizmem** liniowym.

Twierdzenie 3.19

Odwzorowanie liniowe $T : E \rightarrow F$ jest izomorfizmem wtedy i tylko wtedy, gdy istnieje taka funkcja $S : F \rightarrow E$, że

$$S \circ T = \text{Id}_E, \quad T \circ S = \text{Id}_F$$

Twierdzenie 3.20

Niech $T : E \rightarrow F$ będzie odwzorowaniem liniowym. Wówczas istnieje izomorfizm (liniowy) $S : F \rightarrow E$ odwrotny do T wtedy i tylko wtedy, gdy

$$S \circ T = \text{Id}_E, \quad T \circ S = \text{Id}_F$$

Twierdzenie 3.21 (O warunkach równoważnych izomorfizmowi)

Niech

1. $T \in L(E, F)$,
2. $\dim E = n \in \mathbb{N}$.

Równoważne są zdania:

- (1) T jest izomorfizmem liniowym.
- (2) Dla każdej uporządkowanej bazy $B = (e_1, \dots, e_n)$ przestrzeni E , ciąg $(T(e_1), \dots, T(e_n))$ jest uporządkowaną bazą przestrzeni F .
- (3) Istnieje taka uporządkowana baza $B = (e_1, \dots, e_n)$ przestrzeni E , że $(T(e_1), \dots, T(e_n))$ jest bazą przestrzeni F .

Tabela "-izmów" w Algebrze Liniowej

Nazwa	Odwzorowanie $T: E \rightarrow F$	Kluczowa cecha (Po ludzku)	Jak sprawdzić? (Warunek formalny)
Endomorfizm	$T: E \rightarrow E$	"Nie wychodzi z domu". Bierze wektor z E i wynik też jest w E .	Macierz A jest kwadratowa.
Monomorfizm	$T: E \rightarrow F$ (iniekcja)	"Nic się nie zlewa". Dwa różne wektory startowe dają dwa różne wyniki.	Jądro jest trywialne: $\ker T = \{0_E\}$
Epimorfizm	$T: E \rightarrow F$ (suriekcja)	"Pokrywa wszystko". Każdy wektor w przestrzeni F jest wynikiem.	Obraz to cała przestrzeń F : $\text{Im } T = F$
Izomorfizm	$T: E \rightarrow F$ (bijekcja)	"Idealne dopasowanie 1-na-1". Nic się nie zlewa i wszystko jest pokryte.	Jest mono- i epimorfizmem naraz: $\ker T = \{0_E\}$ ORAZ $\text{Im } T = F$
Automorfizm	$T: E \rightarrow E$ (bijekcja)	"Idealne przetasowanie w domu". Odwracalna transformacja w obrębie tej samej przestrzeni.	Jest endomorfizmem i izomorfizmem naraz.

Ściągawka do zapamiętania relacji:

- **Izomorfizm = Monomorfizm + Epimorfizm**

- Musi być różnowartościowe i "na".

- **Automorfizm = Endomorfizm + Izomorfizm**

- Musi być idealnym dopasowaniem, które dodatkowo zostaje w tej samej przestrzeni.

ALGAI WYKLAD 3 Bazy, Izobazy Współrzędne wektora względem bazy

Definicja 3.1

Niech $B = (e_1, e_2, \dots, e_n)$ będzie uporządkowaną bazą przestrzeni wektorowej E , $x \in E$ oraz niech $x_1, x_2, \dots, x_n \in \mathbb{R}$ będą takimi jedynymi liczbami, że $x = \sum_{i=1}^n x_i e_i$. Liczby $x_1, x_2, \dots, x_n$ nazywamy **współrzędnymi wektora x względem bazy B** . Wektor

$$[x]_B := \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix}$$

nazywamy **wektorem współrzędnych wektora x w bazie uporządkowanej B** .

Twierdzenie 3.2 (O izomorfizmie przestrzeni liniowej z $\mathbb{R}^n$)

Niech E będzie przestrzenią wektorową wymiaru $\dim E = n \in \mathbb{N}$ oraz niech $B = (e_1, e_2, \dots, e_n)$ będzie uporządkowaną bazą przestrzeni E . Wówczas odwzorowanie

$$C_B : E \rightarrow \mathbb{R}^n, \quad C_B(x) = [x]_B$$

jest liniowym izomorfizmem.

Wniosek 3.3

Każda rzeczywista przestrzeń liniowa wymiaru $n \in \mathbb{N}$ jest izomorficzna z $\mathbb{R}^n$.

Wniosek 3.4

Jeżeli $B = (e_1, e_2, \dots, e_n)$ jest uporządkowaną bazą przestrzeni wektorowej E , to

$$C_B^{-1} : \mathbb{R}^n \rightarrow E, \quad C_B^{-1} \left(\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix} \right) = \sum_{j=1}^n x_j e_j$$

jest izomorfizmem przestrzeni wektorowych $\mathbb{R}^n$ i E .

Definicja: Diagram przemienny (1)

Niech $f : A \rightarrow B, g : B \rightarrow C, h : A \rightarrow C$. Jeżeli $g \circ f = h$, to mówimy, że przemienny jest diagram.

$$\begin{array}{ccc} A & \xrightarrow{f} & B \\ | & & | \\ h & & g \\ | & & | \\ v & & v \\ C & \xleftarrow{id} & C \end{array}$$

(Forma z wykładu: $A \xrightarrow{f} B, A \xrightarrow{h} C, B \xrightarrow{g} C$)

Definicja: Diagram przemienny (2)

Niech $f : A \rightarrow B, g : A \rightarrow C, h : B \rightarrow D, k : C \rightarrow D$. Jeżeli $h \circ f = k \circ g$, to mówimy, że przemienny jest diagram.

$$\begin{array}{ccc} A & \xrightarrow{f} & B \\ | & & | \\ g & & h \\ | & & | \\ v & & v \\ C & \xrightarrow{k} & D \end{array}$$

Twierdzenie 3.5

Niech $T \in L(E, F)$, $\dim E = n \in \mathbb{N}$, $\dim F = m \in \mathbb{N}$, oraz niech B będzie uporządkowaną bazą przestrzeni E , a D - uporządkowaną bazą przestrzeni F . Wówczas istnieje taka jedyna macierz $A \in \mathcal{M}_{m \times n}$, że

$$C_D \circ T = T_A \circ C_B$$

czyli przemienny jest diagram, oraz

$$A = [[T(e_1)]_D \mid [T(e_2)]_D \mid \cdots \mid [T(e_n)]_D]$$

Definicja 3.6

Niech $T \in L(E, F)$ oraz niech $B = (e_1, \dots, e_n)$ i $D = (d_1, \dots, d_m)$ będą uporządkowanymi bazami odpowiednio przestrzeni E i F . Macierz

$$[T]_{D \leftarrow B} := [[T(e_1)]_D \mid [T(e_2)]_D \mid \cdots \mid [T(e_n)]_D]$$

nazywamy **macierzą odwzorowania liniowego T w bazach uporządkowanych B i D** .

Wniosek 3.10

Jeżeli $T \in L(E, F)$, $\dim E = n \in \mathbb{N}$, $\dim F = m \in \mathbb{N}$, a B i D są uporządkowanymi bazami odpowiednio przestrzeni E i F , to

$$[T(x)]_D = [T]_{D \leftarrow B} \cdot [x]_B$$

dla dowolnego $x \in E$.

Twierdzenie 3.11 (O macierzy złożenia odwzorowań liniowych)

Niech $E \xrightarrow{T} F \xrightarrow{S} G$ będą odwzorowaniami liniowymi między przestrzeniami liniowymi skończonego wymiaru oraz niech B, C, D będą uporządkowanymi bazami odpowiednio przestrzeni E, F, G . Wówczas

$$[S \circ T]_{D \leftarrow B} = [S]_{D \leftarrow C} \cdot [T]_{C \leftarrow B}$$

Twierdzenie 3.12

Niech $T \in L(E, F)$, $\dim E = \dim F = n \in \mathbb{N}$. Równoważne są zdania:

- (1) T jest izomorfizmem liniowym.
- (2) $[T]_{D \leftarrow B}$ jest odwracalna dla dowolnych uporządkowanych baz B i D .
- (3) $[T]_{D \leftarrow B}$ jest odwracalna dla pewnych uporządkowanych baz B i D .

Ponadto jeżeli T jest izomorfizmem, to

$$[T^{-1}]_{B \leftarrow D} = ([T]_{D \leftarrow B})^{-1}$$

Zmiana baz

Definicja 3.13

Niech $B = (b_1, \dots, b_n)$ i D będą uporządkowanymi bazami przestrzeni wektorowej E . Macierz

$$P_{D \leftarrow B} := [[b_1]_D \mid [b_2]_D \mid \dots \mid [b_n]_D]$$

nazywamy **macierzą przejścia od bazy B do bazy D** .

Twierdzenie 3.14

Jeżeli B i D są uporządkowanymi bazami przestrzeni wektorowej E , to

$$P_{D \leftarrow B} = [\text{Id}_E]_{D \leftarrow B}$$

W skrócie: To twierdzenie mówi, że "macierz zmiany bazy" to po prostu macierz odwzorowania "nic nie rób", które przyjmuje wejście w jednym języku, a daje wyjście w innym.

To twierdzenie pokazuje, że macierz przejścia nie jest jakimś nowym, odrębnym bytem, ale szczególnym przypadkiem macierzy odwzorowania liniowego, gdzie tym odwzorowaniem jest właśnie "nic nie robienie" (tożsamość). Ujednotolica to te dwa pojęcia.

Twierdzenie 3.15

Jeżeli B i D są uporządkowanymi bazami przestrzeni wektorowej E , a $x \in E$, to

$$[x]_D = P_{D \leftarrow B} \cdot [x]_B$$

Twierdzenie 3.16

Niech B, D, G będą bazami uporządkowanymi przestrzeni wektorowej E wymiaru $n \in \mathbb{N}$. Wówczas:

- (1) $P_{B \leftarrow B} = I_n$,
- (2) $P_{G \leftarrow D} P_{D \leftarrow B} = P_{G \leftarrow B}$,
- (3) $P_{D \leftarrow B}$ jest odwracalna oraz $(P_{D \leftarrow B})^{-1} = P_{B \leftarrow D}$.

Macierz endomorfizmu liniowego

Definicja 3.17

Niech E będzie przestrzenią wektorową wymiaru $n \in \mathbb{N}$, $T \in \text{End}(E)$, $B = (e_1, \dots, e_n)$ uporządkowaną bazą przestrzeni E . Macierz

$$[T]_B := [T]_{B \leftarrow B} = \left[[T(e_1)]_B \mid [T(e_2)]_B \mid \dots \mid [T(e_n)]_B \right]$$

nazywamy **macierzą endomorfizmu T względem uporządkowanej bazy B** .

Twierdzenie 3.18

Niech B_0 i B będą dwiema uporządkowanymi bazami przestrzeni wektorowej E skończonego wymiaru. Jeżeli $T \in \text{End}(E)$, to

$$[T]_B = P^{-1} [T]_{B_0} P$$

gdzie $P = P_{B_0 \leftarrow B}$ jest macierzą przejścia od bazy B do bazy B_0 .

Twierdzenie 3.19

Niech $A \in \mathcal{M}_{n \times n}$

oraz niech S będzie standardową uporządkowaną bazą $\mathbb{R}^n$.

Niech $B = (K_1, \dots, K_n)$ będzie uporządkowaną bazą $\mathbb{R}^n$ oraz niech P będzie macierzą odwracalną, której kolejne kolumny są wektorami bazy B .

Wówczas

$$[T_A]_B = P^{-1} A P$$

Twierdzenie to mówi, że macierz transformacji w nowej bazie ($[T_A]_B$) to wykonanie tej transformacji "naokoło": najpierw tłumaczymy na bazę standardową S , potem wykonujemy transformację w bazie standardowej (A), a na koniec tłumaczymy wynik z powrotem do nowej bazy (P^{-1}).

ALGAI WYKLAD 4 Macierze podobne

Macierze podobne

Definicja 4.1

Mówimy, że macierz $A \in \mathcal{M}_{n \times n}$ jest podobna do macierzy $B \in \mathcal{M}_{n \times n}$ (co zapisujemy symbolem $A \sim B$) jeśli istnieje taka macierz odwracalna $P \in \mathcal{M}_{n \times n}$, że

$$B = P^{-1}AP$$

Twierdzenie 4.2

Niech $A, B, C \in \mathcal{M}_{n \times n}$. Wówczas:

- (1) $A \sim A$ (zwrotność),
- (2) jeżeli $A \sim B$, to $B \sim A$ (symetria),
- (3) jeżeli $A \sim B$ i $B \sim C$, to $A \sim C$ (przechodność).

Definicja 4.3

Jeśli macierz $A \in \mathcal{M}_{n \times n}$ jest podobna do macierzy $B \in \mathcal{M}_{n \times n}$, to mówimy, że macierze A i B są podobne.

Twierdzenie 4.4

Jeżeli $A, B \in \mathcal{M}_{n \times n}$ oraz $A \sim B$, to

$$\det A = \det B$$

Wniosek 4.5

Niech B i D będą dwiema uporządkowanymi bazami przestrzeni wektorowej E skończonego wymiaru $n \in \mathbb{N}$. Jeżeli $T \in \text{End}(E)$, to

$$\det[T]_B = \det[T]_D$$

Definicja 4.6

Niech E będzie przestrzenią wektorową skończonego wymiaru $n \in \mathbb{N}$ oraz niech B będzie jakąkolwiek uporządkowaną bazą przestrzeni wektorowej E . **Wyznacznikiem endomorfizmu** $T \in \text{End}(E)$ nazywamy liczbę

$$\det(T) := \det[T]_B$$

Wniosek 4.7

Niech S, T będą endomorfizmami przestrzeni wektorowej wymiaru $n \in \mathbb{N}$. Wówczas

$$\det(S \circ T) = \det S \cdot \det T$$

Definicja 4.8

Śladem macierzy kwadratowej $A = [a_{ij}] \in \mathcal{M}_{n \times n}$ nazywamy sumę jej elementów na głównej przekątnej, czyli liczbę

$$\text{tr } A := \sum_{i=1}^n a_{ii}$$

Lemat 4.9

Jeżeli $A, B \in \mathcal{M}_{n \times n}$ i $r \in \mathbb{R}$, to

$$\text{tr}(A + B) = \text{tr } A + \text{tr } B \quad \text{oraz} \quad \text{tr}(rA) = r \text{tr } A$$

Wniosek 4.10

Niech $n \in \mathbb{N}$. Funkcja $\text{tr} : \mathcal{M}_{n \times n} \longrightarrow \mathbb{R}$

$$\text{tr}(A) = \text{tr } A$$

jest odwzorowaniem liniowym.

Twierdzenie 4.11

Jeżeli $A, B \in \mathcal{M}_{n \times n}$, to $\text{tr}(AB) = \text{tr}(BA)$.

Twierdzenie 4.12

Jeżeli $A, B \in \mathcal{M}_{n \times n}$ oraz $A \sim B$, to

$$\text{tr } A = \text{tr } B$$

Definicja 4.13

Niech E będzie przestrzenią wektorową skończonego wymiaru $n \in \mathbb{N}$ oraz niech B będzie uporządkowaną bazą przestrzeni wektorowej E . **Śladem endomorfizmu** $T \in \text{End}(E)$ nazywamy liczbę

$$\text{tr}(T) := \text{tr}[T]_B$$

Twierdzenie 4.14

Jeżeli $A, B \in \mathcal{M}_{n \times n}$ oraz $A \sim B$, to

$$\text{rz}(A) = \text{rz}(B)$$

czyli macierze podobne mają taki sam rząd.

Wniosek 4.15

Niech E będzie przestrzenią wektorową skończonego wymiaru $n \in \mathbb{N}$ oraz niech B będzie uporządkowaną bazą przestrzeni wektorowej E . Jeżeli $T \in \text{End}(E)$, to

$$\text{rank}(T) = \text{rz}[T]_B$$

Wartości i wektory własne

Definicja 4.16

Niech $T \in \text{End}(E)$. Liczbę $\lambda \in \mathbb{R}$ nazywamy **wartością własną** endomorfizmu T jeśli

$$T(x) = \lambda x$$

dla pewnego niezerowego wektora $x \in E$; wówczas mówimy również, że x jest **wektorem własnym** endomorfizmu T odpowiadającym wartości własnej λ .

Twierdzenie 4.17

Niech $T \in \text{End}(E)$ oraz niech $\lambda \in \mathbb{R}$ będzie wartością własną endomorfizmu T . Wówczas

$$\mathcal{E}_\lambda(T) := \{x \in E : T(x) = \lambda x\}$$

jest niezerową podprzestrzenią przestrzeni wektorowej E .

Definicja 4.18

Niech $T \in \text{End}(E)$ oraz niech $\lambda \in \mathbb{R}$ będzie wartością własną endomorfizmu T . Wówczas przestrzeń wektorowa

$$\mathcal{E}_\lambda(T) := \{x \in E : T(x) = \lambda x\}$$

nazywamy **przestrzenią własną** endomorfizmu T odpowiadającą wartości własnej λ .

Definicja 4.19

Niech $A \in \mathcal{M}_{n \times n}$. Liczbę rzeczywistą λ nazywamy **wartością własną macierzy** A , jeśli

$$AX = \lambda X$$

dla pewnego niezerowego wektora $X \in \mathbb{R}^n$; wektor X nazywa się wówczas **wektorem własnym macierzy** A odpowiadającym wartości własnej λ .

Wniosek 4.20

Jeśli $A \in \mathcal{M}_{n \times n}$, to $\lambda \in \mathbb{R}$ jest wartością własną macierzy A wtedy i tylko wtedy, gdy λ jest wartością własną endomorfizmu $T_A \in \text{End}(\mathbb{R}^n)$.

Definicja 4.21

Przestrzenią własną macierzy $A \in \mathcal{M}_{n \times n}$ odpowiadającą wartości własnej λ macierzy A nazywamy przestrzeń

$$\mathcal{E}_\lambda(A) := \{X \in \mathbb{R}^n : AX = \lambda X\}$$

Wniosek 4.22

Jeśli $A \in \mathcal{M}_{n \times n}$ i $\lambda \in \mathbb{R}$ jest jej wartością własną, to

$$\mathcal{E}_\lambda(A) = \mathcal{E}_\lambda(T_A)$$

Ten wniosek mówi, że "specjalne" wektory dla macierzy A (te, które mnożenie przez A tylko rozciąga) są dokładnie tymi samymi "specjalnymi" wektorami dla geometrycznej operacji T_A , którą ta macierz opisuje.

Definicja 4.23 spektrum endomorfizmu

Zbiór wszystkich wartości własnych endomorfizmu liniowego $T \in \text{End}(E)$ nazywa się **spektrum endomorfizmu** T i oznacza się symbolem $\text{spec}(T)$.

Definicja 4.24 spektrum macierzy

Zbiór wszystkich wartości własnych macierzy $A \in \mathcal{M}_{n \times n}$ nazywa się **spektrum macierzy** A i oznacza się symbolem $\text{spec}(A)$.

Twierdzenie 4.25

Niech $A \in \mathcal{M}_{n \times n}$ oraz $\lambda \in \mathbb{R}$. Równoważne są zdania:

- (1) λ jest wartością własną macierzy A .
- (2) $(\lambda I_n - A) X = \mathbf{0}_{\mathbb{R}^n}$ dla pewnego niezerowego wektora $X \in \mathbb{R}^n$.
- (3) Macierz $\lambda I_n - A$ nie jest odwracalna.
- (4) $\det(\lambda I_n - A) = 0$.

Definicja 4.26

Niech $A \in \mathcal{M}_{n \times n}$. **Wielomianem charakterystycznym** macierzy A nazywamy funkcję

$$c_A : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}, \quad c_A(x) = \det(xI_n - A)$$

Twierdzenie 4.27

Niech $A \in \mathcal{M}_{n \times n}$. Liczba $\lambda \in \mathbb{R}$ jest wartością własną macierzy A wtedy i tylko wtedy, gdy λ jest miejscem zerowym wielomianu charakterystycznego c_A .

Wniosek 4.28

Jeżeli $A \in \mathcal{M}_{2 \times 2}$ jest macierzą symetryczną, to ma ona (rzeczywistą) wartość własną.

W szczególności jeśli macierz $A = \begin{bmatrix} a & b \\ b & d \end{bmatrix}$ jest symetryczna ($c = b$), czyli $A = A^T$, to

$$c_A(x) = x^2 - (a + d)x + (ad - b^2).$$

Ćwiczenie 4.29 (Formuła wielomianu charakterystycznego dla 3×3)

Jeśli $A = [a_{ij}] \in \mathcal{M}_{3 \times 3}$, $x \in \mathbb{R}$, to $c_A(x) = c_3 x^3 + c_2 x^2 + c_1 x + c_0$, gdzie

$$c_3 = 1,$$

$$c_2 = -\operatorname{tr} A,$$

$$c_1 = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} a_{11} & a_{13} \\ a_{31} & a_{33} \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} a_{22} & a_{23} \\ a_{32} & a_{33} \end{vmatrix},$$

$$c_0 = -\det A.$$

Twierdzenie 4.30

Jeżeli $A, B \in \mathcal{M}_{n \times n}$ są macierzami podobnymi, to mają ten sam wielomian charakterystyczny.

Twierdzenie 4.32

Niech $T \in \operatorname{End}(E)$ oraz $\lambda \in \mathbb{R}$. Równoważne są zdania:

- λ jest wartością własną endomorfizmu T .
- $(\lambda \operatorname{id}_E - T)X = \Theta_E$ dla pewnego niezerowego wektora $X \in E$.
- $\ker(\lambda \operatorname{id}_E - T) \neq \{\Theta_E\}$.

Definicja 4.33

Niech $T \in \operatorname{End}(E)$ oraz $\dim E = n \in \mathbb{N}$. **Wielomianem charakterystycznym** endomorfizmu T nazywamy funkcję

$$c_T : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}, \quad c_T(x) = \det(x \operatorname{id}_E - T)$$

Twierdzenie 4.34

Niech $T \in \operatorname{End}(E)$ oraz $\dim E = n \in \mathbb{N}$.

Liczba rzeczywista λ jest wartością własną endomorfizmu T wtedy i tylko wtedy, gdy $c_T(\lambda) = 0$.

Twierdzenie 4.35

Niech $T \in \operatorname{End}(E)$, $\dim E = n \in \mathbb{N}$ oraz niech B będzie uporządkowaną bazą przestrzeni wektorowej E .

Liczba $\lambda \in \mathbb{R}$ jest wartością własną endomorfizmu T wtedy i tylko wtedy, gdy jest pierwiastkiem wielomianu charakterystycznego macierzy $[T]_B$.

Twierdzenie 4.36

Jeżeli λ_1 i λ_2 są różnymi wartościami własnymi endomorfizmu $T \in \operatorname{End}(E)$, to

$$\mathcal{E}_{\lambda_1}(T) \cap \mathcal{E}_{\lambda_2}(T) = \{\Theta_E\}$$

Najważniejsza intuicja: Podprzestrzenie własne odpowiadające różnym wartościom własnym są od siebie "fundamentalnie niezależne". Nie mają ze sobą nic wspólnego poza punktem startowym, czyli wektorem zerowym.

ALGAI WYKLAD 5 Diagonalizacja I

Definicja 5.1

Mówimy, że macierz kwadratowa $A = [a_{ij}] \in \mathcal{M}_{n \times n}$ jest **diagonalna**, jeśli

$$a_{ij} = 0$$

dla wszystkich takich $i, j = 1, 2, \dots, n$, że $i \neq j$.

Definicja 5.2

Niech $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_n \in \mathbb{R}$. Macierz diagonalną

$$\begin{bmatrix} \lambda_1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & \lambda_2 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & \lambda_n \end{bmatrix} \in \mathcal{M}_{n \times n}$$

oznaczamy symbolem

$$\text{diag}(\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_n)$$

Definicja 5.3

Mówimy, że macierz kwadratowa $A \in \mathcal{M}_{n \times n}$ jest **diagonalizowalna**, jeśli istnieje taka macierz odwracalna $P \in \mathcal{M}_{n \times n}$, że

$$P^{-1}AP$$

jest diagonalna.

Twierdzenie 5.4

Macierz $A \in \mathcal{M}_{n \times n}$ jest **diagonalizowalna**

WTWG

ma n wektorów własnych tworzących **bazę** przestrzeni wektorowej $\mathbb{R}^n$.

Twierdzenie 5.5 („O diagonalizacji macierzy”)

Niech

$$A \in \mathcal{M}_{n \times n}$$

oraz niech macierz A ma n wektorów własnych $X_1, \dots, X_n$

odpowiadających kolejno wartościom własnym $\lambda_1, \dots, \lambda_n$ macierzy A o tej własności, że $(X_1, \dots, X_n)$ jest uporządkowaną bazą $\mathbb{R}^n$.

Jeśli $P = [X_1 | \dots | X_n]$ jest macierzą o kolejnych kolumnach $X_1, \dots, X_n$, to wówczas

$$P^{-1}AP = \text{diag}(\lambda_1, \dots, \lambda_n)$$

Twierdzenie 5.6

Niech E będzie rzeczywistą przestrzenią wektorową oraz $\lambda_1, \dots, \lambda_k \in \mathbb{R}$ będą parami różnymi wartościami własnymi endomorfizmu $T \in \text{End}(E)$. Jeżeli $X_1, \dots, X_k$ są wektorami własnymi endomorfizmu T odpowiadającymi kolejno wartościom własnym $\lambda_1, \dots, \lambda_k$, to zbiór $\{X_1, \dots, X_k\}$ jest **liniowo niezależny** w E .

Wniosek 5.7

Każda macierz $A \in \mathcal{M}_{n \times n}$ mająca n parami różnych wartości własnych jest **diagonalizowalna**.

Definicja 5.8

Mówimy, że wartość własna $\lambda \in \mathbb{R}$ macierzy $A \in \mathcal{M}_{n \times n}$ ma **krotność** $m \in \mathbb{N}$ jeśli istnieje taki wielomian q , że $q(\lambda) \neq 0$ oraz

$$c_A(x) = (x - \lambda)^m q(x)$$

dla każdego $x \in \mathbb{R}$.

Twierdzenie 5.9

Jeżeli $\lambda \in \mathbb{R}$ jest wartością własną macierzy $A \in \mathcal{M}_{n \times n}$ o krotności $m \in \mathbb{N}$, to

$$\dim(\mathcal{E}_\lambda(A)) \leq m$$

Wniosek 5.10

Jeżeli λ jest wartością własną macierzy $A \in \mathcal{M}_{n \times n}$ o krotności 1, to

$$\dim(\mathcal{E}_\lambda(A)) = 1$$

Twierdzenie 5.11

Niech $A \in \mathcal{M}_{n \times n}$ będzie macierzą, której wielomian charakterystyczny dany jest wzorem

$$x \mapsto c_A(x) = (x - \lambda_1)^{m_1} (x - \lambda_2)^{m_2} \dots (x - \lambda_k)^{m_k}$$

gdzie $\lambda_1, \dots, \lambda_k \in \mathbb{R}$ są parami różnymi wartościami własnymi macierzy A , a $m_1, \dots, m_k \in \mathbb{N}$. Niech $d_j = \dim(\mathcal{E}_{\lambda_j}(A))$ dla każdego $j = 1, \dots, k$.

Wówczas równoważne są zdania:

- (1) A jest diagonalizowalna,
- (2) $d_1 + d_2 + \dots + d_k = n$,
- (3) $d_j = m_j$ dla każdego $j = 1, \dots, k$.

ALGAI WYKLAD 6-7 Suma algebraiczna i suma prosta podprzestrzeni Twierdzenie o wymiarze sumy algebraicznej

Suma algebraiczna podprzestrzeni

Definicja: Suma algebraiczna

Niech E będzie przestrzenią wektorową,
oraz niech $\{E_t\}_{t \in T}$ będzie dowolną rodziną podprzestrzeni wektorowych przestrzeni E .
Sumą algebraiczną tej rodziny podprzestrzeni, oznaczaną $\sum_{t \in T} E_t$, nazywamy zbiór wszystkich wektorów, które dają się przedstawić jako **skończona** suma elementów z tych podprzestrzeni. Formalnie:

$$\sum_{t \in T} E_t := \left\{ \sum_{i=1}^k x_{t_i} : k \in \mathbb{N}, t_i \in T, x_{t_i} \in E_{t_i} \right\}$$

Uwaga

Suma algebraiczna rodziny podprzestrzeni jest zawsze podprzestrzenią wektorową przestrzeni E .

Twierdzenie

Niech $\{E_t\}_{t \in T}$ będzie rodziną podprzestrzeni przestrzeni wektorowej E .
Suma algebraiczna $\sum_{t \in T} E_t$ jest najmniejszą (w sensie inkluzji) podprzestrzenią przestrzeni E zawierającą wszystkie podprzestrzenie E_t z tej rodziny. Inaczej mówiąc:

$$\sum_{t \in T} E_t = \text{span} \left(\bigcup_{t \in T} E_t \right)$$

Twierdzenie (Suma algebraiczna skończonej liczby podprzestrzeni)

Niech $n \in \mathbb{N}$
oraz niech $E_1, E_2, \dots, E_n$ będą podprzestrzeniami przestrzeni wektorowej E .
Wówczas ich suma algebraiczna jest zbiorem:

$$E_1 + E_2 + \dots + E_n = \{x_1 + x_2 + \dots + x_n : x_i \in E_i \text{ dla } i = 1, \dots, n\}$$

Suma prosta podprzestrzeni

Definicja: Suma prosta

Niech $E_1, \dots, E_n$ będą podprzestrzeniami przestrzeni wektorowej E .

Mówimy, że suma algebraiczna $E = E_1 + \dots + E_n$ jest **sumą prostą**, jeżeli każdy wektor $x \in E$ można przedstawić w sposób **jednoznaczny** jako suma

$$x = x_1 + x_2 + \dots + x_n$$

gdzie $x_i \in E_i$ dla $i = 1, \dots, n$. Sumę prostą oznaczamy symbolem:

$$E = E_1 \oplus E_2 \oplus \dots \oplus E_n$$

Twierdzenie (Warunek równoważny sumy prostej)

Niech $E_1, \dots, E_n$ będą podprzestrzeniami przestrzeni wektorowej E .

Suma $E_1 + \dots + E_n$ jest sumą prostą wtedy i tylko wtedy, gdy wektor zerowy θ_E ma tylko jedno przedstawienie jako suma wektorów z tych podprzestrzeni, a mianowicie trywialne:

$$\text{jeśli } x_1 + \dots + x_n = \theta_E \text{ i } x_i \in E_i, \text{ to } x_1 = x_2 = \dots = x_n = \theta_E$$

Twierdzenie (Warunek sumy prostej dla dwóch podprzestrzeni)

Niech E_1, E_2 będą podprzestrzeniami przestrzeni wektorowej E .

Suma $E_1 + E_2$ jest sumą prostą wtedy i tylko wtedy, gdy ich przecięcie jest trywialne:

$$E_1 \cap E_2 = \{\theta_E\}$$

Twierdzenie 8.1 („O wymiarze sumy prostej")

Jeżeli $E_1 \oplus E_2$ jest sumą prostą podprzestrzeni wektorowych E_1 i E_2 , to

$$\dim(E_1 \oplus E_2) = \dim E_1 + \dim E_2$$

Twierdzenie 8.2 („O wymiarze sumy algebraicznej")

Jeżeli E_1 i E_2 są podprzestrzeniami wektorowymi przestrzeni E , to

$$\dim(E_1 + E_2) + \dim(E_1 \cap E_2) = \dim(E_1) + \dim(E_2)$$

Twierdzenie 8.3

Niech E_1 i E_2 będą podprzestrzeniami przestrzeni wektorowej E oraz niech przestrzeń E ma skończony wymiar ($\dim E < \infty$).

Wówczas równoważne są zdania:

- (1) $E = E_1 \oplus E_2$ jest sumą prostą podprzestrzeni wektorowych E_1 i E_2 ,
- (2) $E = E_1 + E_2$ oraz $E_1 \cap E_2 = \{\theta_E\}$,
- (3) $E = E_1 + E_2$ oraz $\dim E_1 + \dim E_2 = \dim E$,
- (4) $E_1 \cap E_2 = \{\theta_E\}$ oraz $\dim E_1 + \dim E_2 = \dim E$.

ALGAI WYKLAD 8 Równania algebraiczne i macierze symetryczne

Równania algebraiczne stopnia 3. Zasadnicze twierdzenie algebry i jego zastosowanie do macierzy symetrycznych

Równania algebraiczne stopnia 3

Wskazówki Tartagli

Dla równania $x^3 + px + q = 0$ należy szukać takich α i β , że

$$\alpha - \beta = q, \quad \alpha\beta = \left(\frac{p}{3}\right)^3$$

Wtedy pierwiastkiem jest $\sqrt[3]{\alpha} - \sqrt[3]{\beta}$.

Dla równania $x^3 = px + q$ należy szukać takich α i β , że

$$\alpha + \beta = q, \quad \alpha\beta = \left(\frac{p}{3}\right)^3$$

Wtedy pierwiastkiem jest $\sqrt[3]{\alpha} + \sqrt[3]{\beta}$.

Twierdzenie

Jeżeli $u + w$ jest rozwiązaniem równania $x^3 + px + q = 0$, to pozostałymi jego (zespolonymi) pierwiastkami są

$$\varepsilon u + \bar{\varepsilon} w, \quad \bar{\varepsilon} u + \varepsilon w$$

gdzie ε jest pierwiastkiem pierwotnym z 1 stopnia 3.

Zasadnicze twierdzenie algebry

Twierdzenie (Zasadnicze twierdzenie algebry)

Każdy wielomian zespolony stopnia dodatniego ma pierwiastek zespolony.

Wniosek

Każdy wielomian zespolony f stopnia $n \in \mathbb{N}$ ma, licząc z krotnościami, n pierwiastków zespolonych.

Oznacza to, że istnieją takie liczby zespolone $z_1, \dots, z_n \in \mathbb{C}$ i $a \in \mathbb{C}$, że

$$f(z) = a \cdot (z - z_1) \cdots (z - z_n)$$

dla każdego $z \in \mathbb{C}$.

Twierdzenie (O istnieniu wartości własnej macierzy symetrycznej)

Dowolna macierz **symetryczna** wymiarów $n \times n$ ma n (licząc z krotnościami) rzeczywistych wartości własnych.

ALGAI WYKLAD 9 Formy dwuliniowe

Przestrzeń odwzorowań liniowych

Definicja: Przestrzeń odwzorowań liniowych

Niech E i F będą rzeczywistymi przestrzeniami liniowymi. Zbiór $L(E, F)$ wszystkich odwzorowań liniowych z E w F jest podprzestrzenią wektorową przestrzeni F^E (wszystkich funkcji z E w F).

Działania w $L(E, F)$ są zdefiniowane następująco:

dla dowolnych $T, S \in L(E, F)$, $r \in \mathbb{R}$ oraz każdego $x \in E$,

$$(T + S)(x) := T(x) + S(x)$$

$$(rT)(x) := rT(x)$$

Przestrzeń dualna

Definicja: Przestrzeń dualna

Niech E będzie rzeczywistą przestrzenią wektorową.

Przestrzenią dualną do E , oznaczaną jako E^* , nazywamy przestrzeń wektorową wszystkich funkcji liniowych z E do $\mathbb{R}$.

Formalnie zapisujemy to jako:

$$E^* := L(E, \mathbb{R})$$

Elementy przestrzeni E^* nazywamy **funkcjonałami liniowymi** na E .

Przestrzeń dualna E^* to zbiór wszystkich liniowych "urządzeń pomiarowych" (funkcjonałów), które potrafią zmierzyć każdy wektor z przestrzeni E , podając w wyniku jedną liczbę rzeczywistą.

Formy dwuliniowe

Definicja: Forma dwuliniowa

Niech E będzie przestrzenią wektorową. **Formą dwuliniową** na przestrzeni E nazywamy każdą funkcję

$$\omega : E \times E \rightarrow \mathbb{R}$$

która jest liniowa ze względu na każdą ze zmiennych, tzn.

$$\omega(x, \cdot) \in E^* \quad \text{oraz} \quad \omega(\cdot, y) \in E^*$$

dla każdych $x, y \in E$.

Definicja: Forma symetryczna

Każdą formę dwuliniową $\omega : E \times E \rightarrow \mathbb{R}$, dla której

$$\omega(x, y) = \omega(y, x) \quad \text{dla wszystkich } x, y \in E$$

nazywamy **formą symetryczną**.

Definicja: Forma skośnie symetryczna

Każdą formę dwuliniową $\omega : E \times E \rightarrow \mathbb{R}$, dla której

$$\omega(x, y) = -\omega(y, x) \quad \text{dla wszystkich } x, y \in E$$

nazywamy **formą skośnie symetryczną** (lub antysymetryczną).

Twierdzenie liniowe mnożenie zero

Jeżeli $B : E \times E \rightarrow \mathbb{R}$ jest formą dwuliniową, to

$$B(x, \theta_E) = 0 \quad \text{oraz} \quad B(\theta_E, x) = 0$$

dla dowolnego wektora $x \in E$.

Każda forma dwuliniowa (czyli każde "liniowe mnożenie" wektorów) połączona z wektorem zerowym zawsze daje w wyniku zero.

Definicja: Forma dodatnio określona

Formę dwuliniową $\omega : E \times E \rightarrow \mathbb{R}$ nazywamy **dodatnio określoną**, jeżeli

$$\omega(x, x) > 0$$

dla dowolnego niezerowego wektora $x \in E \setminus \{\theta_E\}$.

Twierdzenie (Uogólniona nierówność Cauchy'ego-Schwarza)

Niech $(\cdot, \cdot) : E \times E \rightarrow \mathbb{R}$ będzie dodatnio określoną formą dwuliniową.

(a) Dla dowolnych $x, y \in E$ zachodzi:

$$(x, y) \cdot (y, x) \leq (x, x) \cdot (y, y)$$

(b) Jeżeli forma jest dodatkowo symetryczna, to dla dowolnych $x, y \in E$ zachodzi:

$$(x, y)^2 \leq (x, x) \cdot (y, y)$$

Wniosek

Niech $(\cdot, \cdot) : E \times E \rightarrow \mathbb{R}$ będzie formą dwuliniową dodatnio określoną oraz niech $x, y \in E \setminus \{\Theta_E\}$.

Wówczas równość w nierówności Cauchy'ego-Schwarza,

$$(x, y) \cdot (y, x) = (x, x) \cdot (y, y)$$

zachodzi wtedy i tylko wtedy, gdy wektory x, y są liniowo zależne (tzn. $y = tx$ dla pewnego $t \in \mathbb{R}$).

Przykład

Niech $E = \mathbb{R}^2$ ze standardowym iloczynem skalarnym $(v, w) = v \cdot w = v_1 w_1 + v_2 w_2$. Ta forma jest dodatnio określona.

Przypadek 1: Wektory liniowo zależne

Niech $x = (1, 2)$ i $y = (2, 4)$. Widać, że $y = 2x$. Sprawdźmy testem.

1. Lewa strona:

$$\begin{aligned} L &= |(x, y)|^2 = |(1, 2) \cdot (2, 4)|^2 = \\ &= |1 \cdot 2 + 2 \cdot 4|^2 = |2 + 8|^2 = 10^2 = 100 \end{aligned}$$

.

2. Prawa strona:

$$\begin{aligned} P &= ((1, 2) \cdot (1, 2)) \cdot ((2, 4) \cdot (2, 4)) = \\ &= (1^2 + 2^2) \cdot (2^2 + 4^2) = (1 + 4) \cdot (4 + 16) = 5 \cdot 20 = 100 \end{aligned}$$

.

3. **Porównanie:** $L = P$ ($100 = 100$). Wniosek: wektory są **liniowo zależne**. Zgadza się.

Przypadek 2: Wektory liniowo niezależne

Niech $x = (1, 2)$ i $y = (3, 1)$.

1. Lewa strona:

$$\begin{aligned} L &= |(x, y)|^2 = |(1, 2) \cdot (3, 1)|^2 = \\ &= |1 \cdot 3 + 2 \cdot 1|^2 = |3 + 2|^2 = 5^2 = 25 \end{aligned}$$

.

2. Prawa strona:

$$\begin{aligned} P &= ((1, 2) \cdot (1, 2)) \cdot ((3, 1) \cdot (3, 1)) = \\ &= (1^2 + 2^2) \cdot (3^2 + 1^2) = (1 + 4) \cdot (9 + 1) = 5 \cdot 10 = 50 \end{aligned}$$

.

3. **Porównanie:** $L < P$ ($25 < 50$). Wniosek: wektory są **liniowo niezależne**. Zgadza się.

Ograniczenia i Podsumowanie

Zalety:

- Jest to elegancka i potężna metoda.
- Świetnie pokazuje geometryczne znaczenie liniowej zależności w przestrzeniach euklidesowych.

Wady/Ograniczenia:

1. **Działa tylko dla DWÓCH wektorów.** Nie da się jej bezpośrednio zastosować do sprawdzenia zależności trzech lub więcej wektorów na raz.
2. **Wymaga formy dwuliniowej DODATNIO OKREŚLONEJ.** Nie zadziała w przestrzeniach, gdzie (v, v) może być zerem dla niezerowego wektora v (np. w czasoprzestrzeni Minkowskiego).

ALGAI WYKLAD 10 Iloczyn skalarny

Definicja: Iloczyn skalarny

Iloczynem skalarnym na rzeczywistej przestrzeni wektorowej E nazywamy każdą **symetryczną, dodatnio** określoną formę dwuliniową

$$(\cdot, \cdot) : E \times E \longrightarrow \mathbb{R}$$

Lemat zerowa długość do kwadratu

Niech $\omega : E \times E \longrightarrow \mathbb{R}$ będzie formą dwuliniową dodatnio określoną, oraz niech $x \in E$.

Wówczas $\omega(x, x) = 0$

wtedy i tylko wtedy, gdy $x = \Theta_E$.

W przestrzeni z "dobrą metryką" (dodatnio określoną), jedynym wektorem, który ma zerową "długość do kwadratu", jest wektor zerowy.

Ten lemat to formalne ujęcie intuicji, że "tylko nic nie ma rozmiaru".

Twierdzenie (O niezdegenerowaniu iloczynu skalarnego)

Niech $(\cdot, \cdot) : E \times E \longrightarrow \mathbb{R}$ będzie iloczynem skalarnym. Wówczas

$$\{x \in E : \forall y \in E, (x, y) = 0\} = \{\Theta_E\}$$

Jedynym wektorem, który jest prostopadły (ortogonalny) do WSZYSTKICH innych wektorów w przestrzeni, jest wektor zerowy.

Lemat Forma symetryczna

Niech $(\cdot, \cdot)$ oznacza standardowy iloczyn skalarny w $\mathbb{R}^n$.

Forma symetryczna ω_A jest dodatnio określona

wtedy i tylko wtedy, gdy $(Ax, x) > 0$ dla dowolnego $x \in \mathbb{R}^n \setminus \{\Theta_{\mathbb{R}^n}\}$.

Sposób mnożenia wektorów zdefiniowany przez symetryczną macierz A jest "dobry i sensowny" (dodatnio określony) wtedy i tylko wtedy, gdy "mnożenie" dowolnego niezerowego wektora przez samego siebie za pomocą tej macierzy zawsze daje wynik dodatni.

Definicja: Norma

Niech E będzie przestrzenią wektorową z iloczynem skalarnym $(\cdot, \cdot) : E \times E \longrightarrow \mathbb{R}$, oraz niech $x \in E$.

Normą odpowiadającą iloczynowi skalarnemu $(\cdot, \cdot)$ nazywamy funkcję

$$\begin{aligned} \|\cdot\| : E &\longrightarrow [0, +\infty) \\ \|x\| &= \sqrt{(x, x)} \end{aligned}$$

Liczbę $\|x\|$ nazywamy normą wektora x lub **długością wektora x** .

Twierdzenie (Nierówność Cauchy'ego-Schwarza)

Niech E będzie przestrzenią wektorową z iloczynem skalarnym $(\cdot, \cdot)$.
Wówczas

$$|(x, y)| \leq \|x\| \cdot \|y\|$$

dla dowolnych $x, y \in E$.

Twierdzenie (Własności normy)

Niech $\lambda \in \mathbb{R}$ oraz $x, y \in E$. Wówczas:

- (1) $\|\lambda x\| = |\lambda| \cdot \|x\|$ (jednorodność),
- (2) $\|x\| = 0 \iff x = \Theta_E$ (określoność),
- (3) $\|x + y\| \leq \|x\| + \|y\|$ (nierówność trójkąta).

Definicja: Metryka

Definiujemy funkcję

$$\begin{aligned} d : E \times E &\longrightarrow [0, +\infty) \\ d(x, y) &= \|x - y\|. \end{aligned}$$

Twierdzenie (Własności metryki)

Niech $x, y, z \in E$. Wówczas:

- (1) $d(x, y) = 0 \iff x = y$,
- (2) $d(x, y) = d(y, x)$ (symetria),
- (3) $d(x, y) \leq d(x, z) + d(z, y)$ (nierówność trójkąta).

Definicja

Funkcję $d : E \times E \longrightarrow [0, +\infty)$ spełniającą warunki (1)-(3) z ostatniego twierdzenia o Własnościach metryki nazywamy **metryką** na zbiorze E .

Funkcję zdefiniowaną jako $d(x, y) = \|x - y\|$ nazywamy metryką wyznaczoną przez iloczyn skalarny.

Definicja: Wektory ortogonalne

Mówimy, że wektory $x, y \in E$ są **ortogonalne** (lub prostopadłe) względem iloczynu skalarnego $(\cdot, \cdot)$, jeśli $(x, y) = 0$.

Twierdzenie (Twierdzenie Pitagorasa)

Wektory $x, y \in E$ są ortogonalne wtedy i tylko wtedy, gdy

$$\|x + y\|^2 = \|x\|^2 + \|y\|^2$$

Definicja: Zbiór ortogonalny i ortonormalny

Mówimy, że podzbiór $A \subset E$ jest **ortogonalny**, jeśli:

- dla dowolnych $x, y \in A$, jeżeli $x \neq y$, to $(x, y) = 0$,
 - $(x, x) \neq 0$ dla każdego $x \in A$.
- Każdy ortogonalny podzbiór $A \subset E$ nazywamy **ortonormalnym**, jeżeli dodatkowo $(x, x) = 1$ dla każdego $x \in A$.

Twierdzenie (Twierdzenie Pitagorasa dla wielu wektorów)

Jeżeli $A = \{x_1, \dots, x_m\} \subset E$ jest zbiorem wektorów parami ortogonalnych, to

$$\|x_1 + \dots + x_m\|^2 = \|x_1\|^2 + \dots + \|x_m\|^2$$

Twierdzenie ortogonalny liniowo niezależny

Każdy ortogonalny podzbiór przestrzeni E z iloczynem skalarnym jest liniowo niezależny.

Definicja: Baza ortogonalna i ortonormalna

Każdą bazę B przestrzeni wektorowej E będącą zbiorem ortogonalnym [ortonormalnym] nazywamy **ortogonalną bazą** [ortonormalną bazą lub **ON-bazą**] przestrzeni E .

Twierdzenie (O rozkładzie wektora w bazie ortogonalnej)

dowolny wektor w bazie ortogonalnej jest sumą jego projekcji na wektory elementarne tej bazy

Jeżeli $(e_1, \dots, e_n)$ jest ortogonalną bazą przestrzeni E ,
a $x \in E$, to

$$x = \sum_{i=1}^n \frac{(x, e_i)}{\|e_i\|^2} e_i$$

Lemat (o ortogonalizacji)

Niech $\{e_1, \dots, e_m\}$ będzie zbiorem ortogonalnym w E ,
niech $x \in E$, oraz niech

$$e_{m+1} = x - \sum_{j=1}^m \frac{(x, e_j)}{\|e_j\|^2} e_j$$

Wówczas:

- (1) e_{m+1} jest ortogonalny do każdego wektora $e_1, \dots, e_m$,
- (2) jeżeli $x \notin \text{span}\{e_1, \dots, e_m\}$, to $\{e_1, \dots, e_m, e_{m+1}\}$ jest zbiorem ortogonalnym.

Twierdzenie (Algorytm ortogonalizacji Grama-Schmidta)

Niech E będzie przestrzenią z iloczynem skalarnym,
a $(v_1, \dots, v_n)$ jej uporządkowaną bazą.

Definiujemy ciąg wektorów:

$$e_1 = v_1$$
$$e_k = v_k - \sum_{j=1}^{k-1} \frac{(v_k, e_j)}{\|e_j\|^2} e_j \quad \text{dla } k = 2, \dots, n.$$

Wówczas:

- (1) $(e_1, \dots, e_n)$ jest ortogonalną bazą przestrzeni E ,
- (2) $\text{span}\{e_1, \dots, e_k\} = \text{span}\{v_1, \dots, v_k\}$ dla każdego $k = 1, \dots, n$.

Wniosek

Każda niezerowa, skończenie wymiarowa przestrzeń wektorowa
z iloczynem skalarnym ma bazę ortogonalną oraz bazę ortonormalną

Ortogonalne dopełnienie

Definicja: Dopełnienie ortogonalne

Dopełnienie ortogonalne zbioru S to zbiór wszystkich wektorów,
które są prostopadłe do KAŻDEGO wektora ze zbioru S .

Niech $S \subset E$. **Ortogonalnym dopełnieniem** zbioru S w E nazywamy zbiór

$$S^\perp = \{x \in E : \forall y \in S, (x, y) = 0\}$$

Lemat

Niech $S \subset E$. Wówczas $S^\perp$ jest podprzestrzenią wektorową przestrzeni E .

Twierdzenie

Niech S będzie podprzestrzenią wektorową przestrzeni E . Wówczas:

- (1) $S \cap S^\perp = \{\Theta_E\}$,
- (2) $S \subset (S^\perp)^\perp$.

Jedynym wektorem, który należy jednocześnie do podprzestrzeni i do jej dopełnienia
ortogonalnego, jest wektor zerowy.

Podprzestrzeń i jej dopełnienie ortogonalne przecinają się tylko w punkcie zerowym. Są
maksymalnie "rozłączne", jak to tylko możliwe w przestrzeni wektorowej.

Operacja "dopełnienia dopełnienia" $((S^\perp)^\perp)$ przywraca nam oryginalną podprzestrzeń
(przynajmniej w dobrze znanych nam przypadkach).

Twierdzenie (O ortogonalnym rozkładzie)

Jeżeli U jest skończenie wymiarową podprzestrzenią wektorową przestrzeni E , to

$$E = U \oplus U^\perp$$

Każdą przestrzeń można rozłożyć na dwie wzajemnie prostopadłe i uzupełniające się części: dowolnie wybraną podprzestrzeń oraz wszystko, co jest do niej prostopadłe.

Twierdzenie

Jeżeli $\dim E < \infty$ oraz U jest podprzestrzenią przestrzeni E , to

$$\dim E = \dim U + \dim U^\perp$$

Twierdzenie

Jeżeli $\dim E < \infty$ oraz U jest podprzestrzenią przestrzeni E , to

$$(U^\perp)^\perp = U$$

Definicja: Projekcja ortogonalna

Niech E będzie przestrzenią z iloczynem skalarnym, a U jej skończenie wymiarową podprzestrzenią.

Ortogonalną projekcją na U nazywamy funkcję

$$\text{proj}_U : E \rightarrow E$$

zdefiniowaną tak, że $\text{proj}_U(u + w) = u$ dla dowolnych $u \in U, w \in U^\perp$.

Uwaga

Ortogonalna projekcja proj_U jest dobrze określona dla każdej podprzestrzeni U o skończonym wymiarze, gdyż wtedy $E = U \oplus U^\perp$.

Twierdzenie (Własności projekcji ortogonalnej)

Niech U będzie skończenie wymiarową podprzestrzenią E . Wówczas:

- proj_U jest odwzorowaniem liniowym,
- $\text{Im}(\text{proj}_U) = U$,
- $\ker(\text{proj}_U) = U^\perp$,
- $\text{proj}_U \circ \text{proj}_U = \text{proj}_U$ (idempotentność),
- $x - \text{proj}_U(x) \in U^\perp$ dla każdego $x \in E$,
- jeżeli $(e_1, \dots, e_m)$ jest bazą ortonormalną U , to

$$\text{proj}_U(x) = \sum_{i=1}^m (x, e_i) e_i \quad \text{dla każdego } x \in E,$$

- $\|\text{proj}_U(x)\| \leq \|x\|$ dla każdego $x \in E$.

Twierdzenie (O najlepszej aproksymacji)

Rzut ortogonalny wektora na podprzestrzeń jest jego "najlepszym przybliżeniem" w tej podprzestrzeni, ponieważ jest to punkt w tej podprzestrzeni leżący najbliżej oryginalnego wektora.

Niech U będzie skończenie wymiarową podprzestrzenią E ,
oraz niech $x \in E$.

Wówczas wektor $\text{proj}_U(x)$ jest jedynym wektorem w U , który minimalizuje odległość od x , tzn.

$$\|x - \text{proj}_U(x)\| \leq \|x - y\| \quad \text{dla każdego } y \in U.$$

Ponadto, równość zachodzi tylko dla $y = \text{proj}_U(x)$.

To twierdzenie jest podstawą metody najmniejszych kwadratów.

ALGAI WYKLAD 11 Izometrie i macierze ortogonalne

Izometrie

Definicja: Odwzorowanie zachowujące odległość

Niech (X, d_X) i (Y, d_Y) będą przestrzeniami metrycznymi.

Mówimy, że funkcja $f : X \rightarrow Y$ jest **odwzorowaniem zachowującym odległość**, jeżeli

$$d_Y(f(x), f(x')) = d_X(x, x')$$

dla dowolnych $x, x' \in X$.

Twierdzenie

Każde odwzorowanie zachowujące odległość punktów jest **różnowartościowe**.

Definicja: Izometria

Każdą bijekcję $f : X \rightarrow Y$ zachowującą odległość punktów przestrzeni metrycznych $(X, d_X), (Y, d_Y)$ nazywamy **izometrią** tych przestrzeni metrycznych.

Twierdzenie

Jeżeli $f : X \rightarrow Y$ jest izometrią przestrzeni metrycznych (X, d_X) i (Y, d_Y) , to $f^{-1} : Y \rightarrow X$ jest izometrią przestrzeni metrycznych (Y, d_Y) i (X, d_X) .

Twierdzenie (Własności odwzorowania zachowującego odległość i wektor zerowy)

Niech E i F będą przestrzeniami wektorowymi nad $\mathbb{R}$ z iloczynami skalarnymi

$\langle \cdot, \cdot \rangle_E : E \times E \rightarrow \mathbb{R}$ i $\langle \cdot, \cdot \rangle_F : F \times F \rightarrow \mathbb{R}$,

oraz niech $f : E \rightarrow F$ będzie odwzorowaniem zachowującym odległości (względem metryk wyznaczonych przez dane iloczyny skalarne) i spełniającym warunek $f(\theta_E) = \theta_F$.

Wówczas:

- (a) $\|f(x) - f(y)\|_F = \|x - y\|_E$ dla dowolnych $x, y \in E$;
- (b) $\|f(x)\|_F = \|x\|_E$ dla każdego $x \in E$ (zachowuje normę);
- (c) $\langle f(x), f(y) \rangle_F = \langle x, y \rangle_E$ dla dowolnych $x, y \in E$ (f zachowuje iloczyny skalarne);
- (d) jeśli $\{x_1, \dots, x_n\}$ jest ortogonalnym [ortonormalnym] podzbiorem E , to $\{f(x_1), \dots, f(x_n)\}$ jest ortogonalnym [ortonormalnym] podzbiorem F ;
- (e) $f : E \rightarrow F$ jest odwzorowaniem liniowym.

Twierdzenie (O rozkładzie izometrii)

Niech przestrzenie wektorowe E i F będą wyposażone w iloczyny skalarne $\langle \cdot, \cdot \rangle_E$ i $\langle \cdot, \cdot \rangle_F$ - odpowiednio.

Każde odwzorowanie $f : E \rightarrow F$ zachowujące odległość (czyli spełniające równość $\|f(x) - f(y)\|_F = \|x - y\|_E$ dla każdych $x, y \in E$) można zapisać w postaci złożenia

$$f = t_v \circ f_0$$

gdzie $f_0 : E \rightarrow F$ jest odwzorowaniem liniowym zachowującym odległość, a $t_v : F \rightarrow F$ jest translacją o pewien wektor $v \in F$.

Oznacza to, że $f(x) = f_0(x) + v$ dla każdego $x \in E$.

Twierdzenie 3 (Równoważne warunki dla izometrii liniowej)

Niech $f : E \rightarrow F$ będzie odwzorowaniem liniowym między przestrzeniami wektorowymi wyposażonymi odpowiednio w iloczyny skalarne $\langle \cdot, \cdot \rangle_E : E \times E \rightarrow \mathbb{R}$ i $\langle \cdot, \cdot \rangle_F : F \times F \rightarrow \mathbb{R}$. Równoważne są następujące zdania:

- (1) f zachowuje odległość: $\|f(x) - f(y)\|_F = \|x - y\|_E$ dla dowolnych $x, y \in E$;
- (2) f zachowuje normę: $\|f(x)\|_F = \|x\|_E$ dla każdego $x \in E$;
- (3) f zachowuje iloczyn skalarny: $\langle f(x), f(y) \rangle_F = \langle x, y \rangle_E$ dla dowolnych $x, y \in E$.

Twierdzenie 4 (Charakteryzacja izometrii liniowej w przestrzeniach skończonego wymiaru)

Niech $f : E \rightarrow E$ będzie liniowym endomorfizmem,

a E przestrzenią wektorową wymiaru $n \in \mathbb{N}$ z iloczynem skalarnym $\langle \cdot, \cdot \rangle_E : E \times E \rightarrow \mathbb{R}$.

Wówczas równoważne są zdania:

- (1) f zachowuje odległość,
- (2) f jest izometrią,
- (3) obrazem każdej ON-bazy ortonormalnej przestrzeni E w odwzorowaniu f jest ON-baza ortonormalna E ;
- (4) f przekształca pewną ON-bazę ortonormalną E na ON-bazę ortonormalną E .

Macierze ortogonalne

Uwaga

W przestrzeni $\mathbb{R}^n$ będziemy rozważać standardowy iloczyn skalarny. Jeśli $x, y \in \mathbb{R}^n$, to ich iloczyn skalarny można zapisać jako mnożenie macierzy:

$$\langle x, y \rangle = x^T y$$

Definicja: Macierz ortogonalna

Macierz rzeczywistą $A \in \mathcal{M}_{n \times k}$ nazywamy **ortogonalną**, jeśli jej kolumny tworzą zbiór ortonormalny w $\mathbb{R}^n$.

Lemat

Macierz rzeczywista $A \in \mathcal{M}_{n \times k}$ (gdzie $n \geq k$) jest ortogonalna wtedy i tylko wtedy, gdy

$$A^T A = I_k$$

Lemat (O macierzy sprzężonej)

Jeżeli $A \in \mathcal{M}_{n \times k}$, $x \in \mathbb{R}^k$, $y \in \mathbb{R}^n$, to

$$\langle Ax, y \rangle_{\mathbb{R}^n} = \langle x, A^T y \rangle_{\mathbb{R}^k}$$

Działanie macierzy A można "przerzucić" z jednego wektora na drugi w iloczynie skalarnym, pod warunkiem, że zamienimy ją na jej macierz transponowaną A^T .

Twierdzenie

Niech $A \in \mathcal{M}_{n \times k}$ (gdzie $n \geq k$). Odwzorowanie liniowe $f: \mathbb{R}^k \rightarrow \mathbb{R}^n$, $f(x) = Ax$ zachowuje odległość punktów wtedy i tylko wtedy, gdy macierz A jest ortogonalna.

Lemat (Własności kwadratowej macierzy ortogonalnej)

Niech $A \in \mathcal{M}_{n \times n}$ będzie macierzą ortogonalną. Wówczas:

- (1) $\det A = \pm 1$,
- (2) macierz A jest odwracalna oraz $A^{-1} = A^T$,
- (3) macierz A^T jest ortogonalna.

Twierdzenie

Iloczyn dwóch macierzy ortogonalnych jest macierzą ortogonalną.

Wniosek

Zbiór wszystkich ortogonalnych macierzy rzeczywistych kwadratowych wymiaru $n \times n$ z mnożeniem macierzy jest grupą*, którą oznaczamy symbolem $O(n)$.

Relacje między grupami:

- **Ogólna grupa liniowa:**
 $O(n) < GL(n) = \{A \in \mathcal{M}_{n \times n} : \det A \neq 0\}$
- **Specjalna grupa ortogonalna (grupa obrotów):**
 $SO(n) = \{A \in O(n) : \det A = 1\}$
- **Hierarchia podgrup:**
 $SO(n) < O(n) < GL(n)$

Definicja: Grupa

Układ $(G, \bullet)$, w którym G jest zbiorem niepustym, a $\bullet: G \times G \rightarrow G$ jest działaniem, nazywamy **grupą**, jeśli spełnione są warunki:

- (1) działanie jest łączne: $a \bullet (b \bullet c) = (a \bullet b) \bullet c$ dla dowolnych $a, b, c \in G$,
- (2) istnieje element neutralny $e \in G$: $a \bullet e = e \bullet a = a$ dla każdego $a \in G$,
- (3) dla każdego $a \in G$ istnieje element odwrotny $a^{-1} \in G$: $a \bullet a^{-1} = a^{-1} \bullet a = e$.

Wniosek

Zbiór wszystkich ortogonalnych macierzy kwadratowych wymiaru $n \times n$ z mnożeniem macierzy tworzy grupę, oznaczaną $O(n)$.

Wniosek (Równoważne warunki ortogonalności macierzy kwadratowej)

Macierz $A \in \mathcal{M}_{n \times n}$ jest ortogonalna wtedy i tylko wtedy, gdy spełniony jest jeden z równoważnych warunków:

- (1) Kolumny macierzy A tworzą zbiór ortonormalny w $\mathbb{R}^n$;
- (2) Wiersze macierzy A tworzą zbiór ortonormalny w $\mathbb{R}^n$;
- (3) $A^T A = I_n$;
- (4) $AA^T = I_n$.

Twierdzenie

Niech $A \in \mathcal{M}_{n \times n}$. Endomorfizm liniowy $f : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$, $f(X) = AX$ jest izometrią wtedy i tylko wtedy, gdy macierz A jest ortogonalna.

1. Co to jest "grupa"?

W skrócie, "grupa" to zbiór obiektów (tutaj macierzy) z jednym działaniem (tutaj mnożenie macierzy), który jest "dobrze wychowany". Oznacza to, że:

- **Mnożenie nie wyprowadza nas poza zbiór:** Iloczyn dwóch macierzy ortogonalnych jest wciąż macierzą ortogonalną.
- **Istnieje element neutralny:** Macierz jednostkowa (I) jest w tym zbiorze.
- **Każdy element ma odwrotność:** Każda macierz ortogonalna jest odwracalna, a jej odwrotność również jest ortogonalna.

2. Grupa Ortogonalna $O(n)$

- **Co to jest?** To jest "klub" wszystkich macierzy $n \times n$, które reprezentują **izometrie**, czyli transformacje, które **nie zmieniają długości ani kątów**.
- **Jakie to transformacje?** W naszej przestrzeni są to **OBROTY** i **ODBICIA** (lustrzane odbicie lub odbicie z obrotem).
- **Przykład:** Macierz obrotu o 30 stopni w 2D należy do $O(2)$. Macierz odbicia względem osi Y też należy do $O(2)$.

Ogólna Grupa Liniowa $GL(n)$

- **Co to jest?** To jest "super-klub" wszystkich macierzy $n \times n$, które są **odwracalne**. Ich wyznacznik musi być różny od zera.
- **Co to oznacza?** Reprezentują one wszystkie transformacje, które nie "zgniatą" przestrzeni do niższego wymiaru. Można je cofnąć.
- **Relacja:** Każda macierz ortogonalna jest odwracalna (jej wyznacznik to 1 lub -1), więc **grupa $O(n)$ jest podgrupą $GL(n)$** . Innymi słowy, każdy obrót i odbicie to transformacja odwracalna, ale nie każda transformacja odwracalna (np. rozciąganie) jest obrotem lub odbiciem.

4. Specjalna Grupa Ortogonalna $SO(n)$ (Grupa Obrotów)

- **Co to jest?** To jest bardziej **ekskluzywny klub** wewnątrz $O(n)$. Należą do niego tylko te macierze ortogonalne, których **wyznacznik wynosi dokładnie +1**.
- **Jakie to transformacje?** Są to **WYŁĄCZNIE OBROTY**. Macierze odbicia mają wyznacznik -1, więc są z tego klubu wyrzucone.
- **Dlaczego "specjalna"?** Bo zachowuje nie tylko długości i kąty, ale także **orientację** przestrzeni (nie zamienia rękawiczki lewej na prawą, jak robi to lustro). Dlatego jest nazywana **grupą obrotów**.

Podsumowanie Hierarchii

$$SO(n) < O(n) < GL(n)$$

- $SO(n)$ (**same obroty**) to podgrupa $O(n)$ (**obroty i odbicia**).
- $O(n)$ (**obroty i odbicia**) to podgrupa $GL(n)$ (**wszystkie odwracalne transformacje**).

ALGAI WYKLAD 12 Forma kwadratowa i Twierdzenie Sylwestera

Forma kwadratowa i jej macierz

Definicja: Macierz formy dwuliniowej

Niech E będzie przestrzenią wektorową wymiaru $n \in \mathbb{N}$,
niech $B = (e_1, \dots, e_n)$ będzie jej uporządkowaną bazą,
oraz niech $\omega : E \times E \rightarrow \mathbb{R}$ będzie formą dwuliniową.

Macierzą formy dwuliniowej ω w bazie B nazywamy macierz

$$M_{\omega}^B = [\omega(e_i, e_j)]_{1 \leq i, j \leq n} \in \mathcal{M}_{n \times n}$$

Twierdzenie (Zmiana macierzy formy dwuliniowej przy zmianie bazy)

Niech E będzie przestrzenią wektorową wymiaru $n \in \mathbb{N}$,
niech $\omega : E \times E \rightarrow \mathbb{R}$ będzie formą dwuliniową,
oraz niech B, B' będą bazami przestrzeni E .

Wówczas

$$M_{\omega}^B = (P_{B' \leftarrow B})^T \cdot M_{\omega}^{B'} \cdot P_{B' \leftarrow B}$$

Definicja: Forma kwadratowa

Niech E będzie przestrzenią wektorową. Odwzorowanie $q : E \rightarrow \mathbb{R}$ nazywamy **formą kwadratową**, jeśli istnieje taka forma dwuliniowa $\omega : E \times E \rightarrow \mathbb{R}$, że

$$q(x) = \omega(x, x)$$

dla każdego $x \in E$.

Twierdzenie (Formuła polaryzacyjna)

Niech E będzie przestrzenią wektorową,

oraz niech $\omega : E \times E \rightarrow \mathbb{R}$ będzie formą dwuliniową symet

Wówczas

\$\$

$$\omega(x, y) = \frac{1}{2}(q(x+y) - q(x) - q(y))$$

\$\$

gdzie $q(v) = \omega(v, v)$.

Twierdzenie (O formie kwadratowej)

Niech E będzie przestrzenią wektorową.

Dla każdej formy kwadratowej $q : E \rightarrow \mathbb{R}$ istnieje dokładnie jedna taka forma dwuliniowa symetryczna $\omega : E \times E \rightarrow \mathbb{R}$, że

$$q(x) = \omega(x, x)$$

dla dowolnego $x \in E$.

Definicja: Forma stowarzyszona

Formą stowarzyszoną (skojarzoną) z formą kwadratową $q : E \rightarrow \mathbb{R}$ nazywamy jedyną formę dwuliniową symetryczną $\omega : E \times E \rightarrow \mathbb{R}$, dla której $q(x) = \omega(x, x)$.

Definicja: Macierz formy kwadratowej

Macierzą formy kwadratowej $q : E \rightarrow \mathbb{R}$ w bazie uporządkowanej B nazywamy macierz formy dwuliniowej stowarzyszonej z q w bazie B .

Definicja: Ortogonalna diagonalizowalność

Mówimy, że macierz $A \in \mathcal{M}_{n \times n}$ jest **ortogonalnie diagonalizowalna**, jeżeli istnieje taka macierz ortogonalna $P \in O(n)$, że

$$P^T A P$$

jest macierzą diagonalną.

Twierdzenie (o macierzach symetrycznych)

Niech $A \in \mathcal{M}_{n \times n}$. Równoważne są zdania:

- (1) A ma ortonormalny w $\mathbb{R}^n$ zbiór n wektorów własnych,
- (2) A jest ortogonalnie diagonalizowalna,
- (3) A jest symetryczna.

Twierdzenie (O istnieniu wartości własnej macierzy symetrycznej).

Dowolna macierz **symetryczna** wymiarów $n \times n$ ma n (licząc z krotnościami) rzeczywistych wartości własnych.

Wniosek.

Dla macierzy symetrycznej, wszystkie "magiczne" liczby (wartości własne) są rzeczywiste, a jej wielomian charakterystyczny całkowicie rozkłada się na proste czynniki liniowe.

Jeżeli $A = [a_{ij}] \in \mathcal{M}_{n \times n}$ jest macierzą symetryczną, to istnieją takie $k \in \mathbb{N}, k \leq n, \lambda_1, \dots, \lambda_k \in \mathbb{R}, n_1, \dots, n_k \in \mathbb{N}$, że $n_1 + \dots + n_k = n$ oraz wielomian charakterystyczny macierzy A dany jest wzorem

$$c_A(t) = (t - \lambda_1)^{n_1} (t - \lambda_2)^{n_2} \dots (t - \lambda_k)^{n_k}$$

dla każdego $t \in \mathbb{R}$.

Twierdzenie o osiach głównych

Każdą skomplikowaną formę kwadratową (np. $3x^2 + 2xy + 3y^2$) można uprościć do postaci kanonicznej sumy samych kwadratów (np. $4y_1^2 + 2y_2^2$) poprzez odpowiedni obrót układu współrzędnych.

Niech $q : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ będzie formą kwadratową. Niech $A \in \text{Sym}(n) \subset \mathcal{M}_{n \times n}$ będzie macierzą formy q w bazie standardowej $\mathbb{R}^n$, czyli taką macierzą symetryczną, że

$$q(X) = X^T A X$$

dla każdego $X \in \mathbb{R}^n$.

Wówczas istnieje taka macierz $P \in O(n)$, że $P^T A P =: D = \text{diag}(\lambda_1, \dots, \lambda_n)$ jest diagonalna, gdzie $\lambda_1, \dots, \lambda_n$ są wszystkimi wartościami własnymi macierzy A (licząc z wielokrotnościami) oraz jeśli $X \in \mathbb{R}^n$, $Y = P^T X = \begin{bmatrix} y_1 & y_2 & \dots & y_n \end{bmatrix}^T$, to

$$\begin{aligned} X^T A X &= (PY)^T A (PY) = Y^T (P^T A P) Y = Y^T D Y \\ q(PY) &= \lambda_1 y_1^2 + \lambda_2 y_2^2 + \dots + \lambda_n y_n^2 \end{aligned}$$

Definicja: Postać kanoniczna formy kwadratowej

Mówimy, że forma kwadratowa $q : E \rightarrow \mathbb{R}$ jest w **postaci kanonicznej** (lub diagonalnej) w bazie $(e_1, \dots, e_n)$, jeżeli istnieją takie skalary $a_1, \dots, a_n \in \mathbb{R}$, że

$$q(x) = \sum_{i=1}^n a_i x_i^2$$

dla dowolnego wektora $x = \sum_{i=1}^n x_i e_i \in E$.

Twierdzenie (Sylvestra o bezwładności)

Dla każdej formy kwadratowej można znaleźć taki (niekoniecznie prostopadły) układ współrzędnych, w którym jej wzór to tylko suma i różnica kwadratów współrzędnych, ze współczynnikami $+1$, -1 lub 0 . **

Jeżeli $q : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ jest formą kwadratową,

to istnieje taka baza $(e_1, \dots, e_n)$ przestrzeni $\mathbb{R}^n$ oraz istnieją takie jednoznacznie wyznaczone liczby całkowite nieujemne s, t ,

że dla dowolnego $x = \sum_{i=1}^n x_i e_i \in \mathbb{R}^n$ zachodzi

$$q(x) = (x_1)^2 + \dots + (x_s)^2 - (x_{s+1})^2 - \dots - (x_{s+t})^2$$

Liczby s (indeks dodatni) i t (indeks ujemny) nie zależą od wyboru bazy, w której forma ma powyższą postać.

Definicja: Indeksy bezwładności

Niech $A \in \mathcal{M}_{n \times n}$ będzie macierzą symetryczną.

- **Dodatnim indeksem bezwładności** macierzy A , oznaczanym $\sigma^+(A)$, nazywamy liczbę jej dodatnich wartości własnych.
 - **Ujemnym indeksem bezwładności** macierzy A , oznaczanym $\sigma^-(A)$, nazywamy liczbę jej ujemnych wartości własnych.
- Indeksem formy kwadratowej nazywamy dodatni indeks jej macierzy.

Definicja. Indeksem formy kwadratowej q na przestrzeni wektorowej skończonego dodatniego wymiaru nazywamy dodatni indeks jej macierzy (czyli liczbę jej dodatnich wartości własnych).

Twierdzenie (Sylvestra o bezwładności - wersja macierzowa)

Jeśli dwie macierze symetryczne opisują tę samą "geometryczną deformację" (formę kwadratową), tylko z perspektywy dwóch różnych układów współrzędnych, to muszą mieć taką samą liczbę dodatnich i ujemnych wartości własnych.

Jeżeli $A, B \in \mathcal{M}_{n \times n}$ są macierzami (symetrycznymi) tej samej formy kwadratowej w różnych bazach, to

$$\sigma^+(A) = \sigma^+(B) \quad \text{oraz} \quad \sigma^-(A) = \sigma^-(B)$$

ALGAI WYKLAD 13 Klasyfikacja krzywych i powierzchni stopnia 2

Klasyfikacja krzywych stopnia 2

Definicja: Typ krzywej stopnia 2

Niech dana będzie forma kwadratowa $q(x, y) = ax^2 + bxy + cy^2$ o wartościach własnych λ_1, λ_2 .

Mówimy, że zbiór punktów $\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : q(x, y) + dx + ey + f = 0\}$ jest typu:

- **eliptycznego**, jeśli $\lambda_1 \cdot \lambda_2 > 0$ (obie wartości własne niezerowe i tego samego znaku),
- **hiperbolicznego**, jeśli $\lambda_1 \cdot \lambda_2 < 0$ (obie wartości własne niezerowe i różnych znaków),
- **parabolicznego**, jeśli $\lambda_1 = 0$ lub $\lambda_2 = 0$ (przynajmniej jedna wartość własna jest zerowa).

Definicja: Elipsa

Niech π będzie płaszczyzną, a na niej dwa różne punkty f_1, f_2 zwane ogniskami.

Elipsą o osi wielkiej długości $2a > d(f_1, f_2)$ nazywamy zbiór punktów $p \in \pi$ spełniających warunek:

$$d(p, f_1) + d(p, f_2) = 2a$$

Równanie kanoniczne elipsy:

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$$

Definicja: Hiperbola

Niech π będzie płaszczyzną, a na niej dwa różne punkty f_1, f_2 zwane ogniskami.

Hiperbolą o osi wielkiej długości $2a < d(f_1, f_2)$ nazywamy zbiór punktów $p \in \pi$ spełniających warunek:

$$|d(p, f_1) - d(p, f_2)| = 2a$$

Równanie kanoniczne hiperboli:

$$\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1$$

Definicja: Parabola

Parabolą nazywamy zbiór punktów płaszczyzny, których odległość od ustalonego punktu f (ogniska) jest równa odległości od ustalonej prostej (kierownicy).

Równanie kanoniczne paraboli:

$$y^2 = 2px$$

Twierdzenie

Niech $A \in \mathcal{M}_{n \times n}$ będzie macierzą symetryczną,
oraz niech $\lambda_1, \lambda_2 \in \mathbb{R}$ będą jej różnymi wartościami własnymi.
Wówczas odpowiadające im przestrzenie własne są ortogonalne:

$$\mathcal{E}_{\lambda_1}(A) \perp \mathcal{E}_{\lambda_2}(A)$$

Definicja: Kierunki główne

Niech $A \in \text{Sym}(n)$ będzie macierzą symetryczną.

Zbiorem kierunków głównych macierzy A nazywamy ortonormalną bazę $\mathbb{R}^n$ złożoną z jej wektorów własnych.

Zbiorem kierunków głównych formy kwadratowej nazywamy zbiór kierunków głównych jej macierzy.

Powierzchnie stopnia drugiego (Kwadryki)

Definicja: Powierzchnia stopnia drugiego

Powierzchnią stopnia drugiego w $\mathbb{R}^3$ nazywamy zbiór punktów (x, y, z) , których współrzędne spełniają równanie postaci:

$$\begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix}^T A \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} + B \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} + f = 0$$

gdzie A jest niezerową macierzą symetryczną 3×3 , B jest wektorem wierszowym, a f jest stałą.

Klasyfikacja powierzchni stopnia drugiego

1. **Elipsoida:** $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} = 1$
 - *Przypadek szczególny: Sfera, gdy $a = b = c$.*
2. **Hiperboloida jednowłokowa:** $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} - \frac{z^2}{c^2} = 1$
3. **Hiperboloida dwuwłokowa:** $\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} - \frac{z^2}{c^2} = 1$
4. **Paraboloida eliptyczna:** $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = \frac{z}{p}$
5. **Paraboloida hiperboliczna (siodło):** $\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = \frac{z}{p}$
6. **Stożek:** $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} - \frac{z^2}{c^2} = 0$
7. **Walec eliptyczny:** $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$
8. **Walec hiperboliczny:** $\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1$
9. **Walec paraboliczny:** $y^2 = 2px$

Tabela 1: Klasyfikacja Krzywych Stopnia 2 w $\mathbb{R}^2$

Równanie ogólne: $ax^2 + bxy + cy^2 + dx + ey + f = 0$

Równanie kanoniczne po diagonalizacji i przesunięciu: $\lambda_1 x'^2 + \lambda_2 y'^2 + d'x' + e'y' + f' = 0$

Analizujemy znaki wartości własnych λ_1, λ_2 macierzy formy kwadratowej $\begin{bmatrix} a & b/2 \\ b/2 & c \end{bmatrix}$.

Typ	Znaki (λ_1, λ_2)	Równanie kanoniczne w najprostszej formie	Nazwa Krzywej
Eliptyczny	+, +	$\frac{x'^2}{a^2} + \frac{y'^2}{b^2} = 1$	Elipsa
	+, +	$\lambda_1 x'^2 + \lambda_2 y'^2 = 0$	Punkt
	+, +	$\lambda_1 x'^2 + \lambda_2 y'^2 = -1$	Zbiór pusty
Hiperboliczny	+, -	$\frac{x'^2}{a^2} - \frac{y'^2}{b^2} = 1$ lub $-\frac{x'^2}{a^2} + \frac{y'^2}{b^2} = 1$	Hiperbola
	+, -	$\frac{x'^2}{a^2} - \frac{y'^2}{b^2} = 0$	Dwie przecinające się proste
Paraboliczny	+, 0	$y'^2 = 2px'$	Parabola
	+, 0	$x'^2 = k^2$	Dwie proste równoległe
	+, 0	$x'^2 = 0$	Jedna prosta (podwójna)
	+, 0	$x'^2 = -k^2$	Zbiór pusty

Tabela 2: Klasyfikacja Powierzchni Stopnia 2 (Kwadryk) w $\mathbb{R}^3$

Równanie ogólne: $q(x, y, z) + dx + ey + fz + g = 0$

Równanie kanoniczne po diagonalizacji i przesunięciu: $\lambda_1 x'^2 + \lambda_2 y'^2 + \lambda_3 z'^2 + d'x' + e'y' + f'z' + g' = 0$

Analizujemy znaki wartości własnych $\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3$.

Typ	Znaki ($\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3$)	Równanie kanoniczne w najprostszej formie	Nazwa Powierzchni
Eliptyczny	+, +, +	$\frac{x'^2}{a^2} + \frac{y'^2}{b^2} + \frac{z'^2}{c^2} = 1$	Elipsoida
	+, +, +	$\frac{x'^2}{a^2} + \frac{y'^2}{b^2} + \frac{z'^2}{c^2} = 0$	Punkt
	+, +, +	$\frac{x'^2}{a^2} + \frac{y'^2}{b^2} + \frac{z'^2}{c^2} = -1$	Zbiór pusty
Hiperboliczny	+, +, -	$\frac{x'^2}{a^2} + \frac{y'^2}{b^2} - \frac{z'^2}{c^2} = 1$	Hiperboloida jednopowłokowa
	+, +, -	$\frac{x'^2}{a^2} + \frac{y'^2}{b^2} - \frac{z'^2}{c^2} = 0$	Stożek
	+, +, -	$\frac{x'^2}{a^2} + \frac{y'^2}{b^2} - \frac{z'^2}{c^2} = -1$	Hiperboloida dwupowłokowa
	+, -, -	$\frac{x'^2}{a^2} - \frac{y'^2}{b^2} - \frac{z'^2}{c^2} = 1$	Hiperboloida dwupowłokowa
	+, -, -	$\frac{x'^2}{a^2} - \frac{y'^2}{b^2} - \frac{z'^2}{c^2} = 0$	Stożek
Paraboliczny	+, +, 0	$\frac{x'^2}{a^2} + \frac{y'^2}{b^2} = \frac{z'}{p}$	Paraboloida eliptyczna
	+, -, 0	$\frac{x'^2}{a^2} - \frac{y'^2}{b^2} = \frac{z'}{p}$	Paraboloida hiperboliczna (siodło)
	+, +, 0	$\frac{x'^2}{a^2} + \frac{y'^2}{b^2} = 1$	Walec eliptyczny
	+, -, 0	$\frac{x'^2}{a^2} - \frac{y'^2}{b^2} = 1$	Walec hiperboliczny
	+, 0, 0	$y'^2 = 2px'$	Walec paraboliczny
	+, 0, 0	$x'^2 = k^2$	Dwie płaszczyzny równoległe
	+, 0, 0	$x'^2 = 0$	Jedna płaszczyzna (podwójna)
	+, 0, 0	$x'^2 = -k^2$	Zbiór pusty

ALGAI WYKLAD 14-15 Określoność form kwadratowych

Definicja 14.1: Forma dodatnio określona

Formę kwadratową $q : E \rightarrow \mathbb{R}$ nazywamy **dodatnio określoną**, jeśli $q(x) > 0$ dla każdego niezerowego wektora $x \in E \setminus \{0_E\}$.

Definicja 14.2: Forma ujemnie określona

Formę kwadratową $q : E \rightarrow \mathbb{R}$ nazywamy **ujemnie określoną**, jeśli $q(x) < 0$ dla każdego niezerowego wektora $x \in E \setminus \{0_E\}$.

Twierdzenie 14.3

Niech $a, b, c \in \mathbb{R}$. Forma kwadratowa $q(x, y) = ax^2 + 2bxy + cy^2$ jest dodatnio określona wtedy i tylko wtedy, gdy

$$a > 0 \quad \text{oraz} \quad \begin{vmatrix} a & b \\ b & c \end{vmatrix} > 0$$

Twierdzenie 14.4

Niech $a, b, c \in \mathbb{R}$. Forma kwadratowa $q(x, y) = ax^2 + 2bxy + cy^2$ jest ujemnie określona wtedy i tylko wtedy, gdy

$$a < 0 \quad \text{oraz} \quad \begin{vmatrix} a & b \\ b & c \end{vmatrix} > 0$$

Definicja 14.5: Minor główny

Minorem głównym (lub narożnym) rzędu $k \in \mathbb{N}$ macierzy kwadratowej $A = [a_{ij}]_{n \times n}$ nazywamy wyznacznik podmacierzy powstałej z pierwszych k wierszy i k kolumn macierzy A :

$$\delta_k = \det [a_{ij}]_{k \times k}$$

Definiujemy ponadto $\delta_0 = 1$.

Twierdzenie 14.6

Niech E będzie przestrzenią wektorową wymiaru $n \in \mathbb{N}$,

niech $B = (e_1, \dots, e_n)$ będzie bazą przestrzeni E ,

niech $q : E \rightarrow \mathbb{R}$ będzie formą kwadratową o macierzy A w bazie B .

Jeżeli wszystkie minory główne $\delta_1, \dots, \delta_n$ macierzy A są różne od zera, to istnieje jedyna baza $(f_1, \dots, f_n)$ ortogonalna względem formy ω (stowarzyszonej z q) taka, że:

- $f_k \in e_k + \text{span}\{e_1, \dots, e_{k-1}\}$ dla każdego $k = 1, \dots, n$,
- wartości formy na wektorach bazowych wynoszą $q(f_k) = \frac{\delta_k}{\delta_{k-1}}$.

Jeśli macierz formy kwadratowej ma "dobre własności" (niezerowe minory główne), to możemy skonstruować specjalną, "trójkątną" bazę ortogonalną krok po kroku, a "długości do kwadratu" wektorów w tej nowej bazie można obliczyć bezpośrednio z wyznaczników tej macierzy.

Twierdzenie 14.7

Jeżeli wszystkie minory główne $\delta_1, \dots, \delta_n$ macierzy A formy kwadratowej q są niezerowe, to ujemny indeks bezwładności tej formy jest równy liczbie zmian znaków w ciągu

$$1, \delta_1, \delta_2, \dots, \delta_n$$

Jeśli chcesz wiedzieć, ile "minusów" kryje w sobie Twoja forma kwadratowa, po prostu policz, ile razy zmienia się znak w sekwencji wyznaczników jej macierzy.

Twierdzenie 14.8 (Kryterium Sylwestera dla form dodatnio określonych)

Rzeczywista forma kwadratowa jest dodatnio określona wtedy i tylko wtedy, gdy wszystkie minory główne $\delta_1, \dots, \delta_n$ jej macierzy są dodatnie.

Twierdzenie 14.9

Jeżeli forma kwadratowa q na przestrzeni E wymiaru $n \in \mathbb{N}$ jest dodatnio określona, to macierz A tej formy (w dowolnej bazie) ma dodatni wyznacznik: $\det A > 0$.

Twierdzenie 14.10 (Kryterium Sylwestera dla form ujemnie określonych)

Forma kwadratowa jest ujemnie określona wtedy i tylko wtedy, gdy jej minory główne δ_k spełniają warunek:

$$(-1)^k \delta_k > 0 \quad \text{dla każdego } k = 1, \dots, n$$

(tzn. $\delta_1 < 0, \delta_2 > 0, \delta_3 < 0, \dots$)